ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
კომპიუტერულ მეცნიერებათა დეპარტამენტი
გამოყენებითი ინფორმატიკის კათედრა

დოქტორანტურის საგანმანათლებლო პროგრამა
კომპიუტერული მეცნიერება

გვანცა წულაია

გადაწყვეტილების მიღების აგრეგირების ოპერატორები და სქემები ფაზი განუზღვრელ გარემოში

კომპიუტინგის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

გია სირბილაძე
ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
თსუ–ს პროფესორი

ირინა ხუციშვილი
ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,
თსუ–ს ასოც. პროფესორი

თბილისი
2021 წელი

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Faculty of Exact and Natural Sciences

Department of Computer Sciences

Chair of Applied Informatics

PhD Program: Computer Science

Gvantsa Tsulaia

Decision Making Aggregation Operators and Schemes in the Fuzzy Uncertain Environment

The thesis work is performed to obtain a PhD academic degree in Computing

Scientific Supervisors:

Gia Sirbiladze

Doctor of Science in Physics and Mathematics,

Professor at TSU

Irina Khutsishvili

Candidate of Science in Physics and Mathematics,

Associate Professor at TSU

Tbilisi

2021 Year

აბსტრაქტი

სადისერტაციო ნაშრომში წარმოდგენილია გადაწყვეტილების მიღების დაზუსტებისა და გადაწყვეტილების მიღების რისკების შემცირების მიზნით ახალი კონსტრუირებული აგრეგირების ოპერატორებზე დაფუძნებული მეთოდები და სქემები, სადაც გათვალისწინებულია ურთიერთმოქმედი და/ან ურთიერთდამოკიდებული ატრიბუტების/ფაქტორების/კრიტერიუმების შემთხვევა ინტუიციონისტურ ან პითაგორულ ფაზი განუზღვრელობის გარემოში. მათი გამოყენებით იქმნება შესაძლებლობა მაღალი სანდოობით შეირჩეს ოპტიმალური გადაწყვეტილება/გადაწყვეტილებები ან მოხდეს შესაძლო ალტერნატივების სრული რანჟირება მნიშვნელოვან პრაქტიკულ ამოცანებში ისეთი მიმართულებებით, როგორიცაა: სტრატეგიული მენეჯმენტი, სამედიცინო დიაგნოსტიკა და პროგნოზი (დაავადების მოსალოდნელი შედეგი), ბიზნესი, რთული ინდუსტრიული პროცესების მონიტორინგი/კონტროლი, ექსტრემალური და ანომალიური მოვლენების შედეგად მიღებულ დაზიანებულ ზონებში აღდგენითი სამუშაოების დაგეგმვა და სხვა.

ამ მიზნით მრავალექსპერტული, მრავალკრიტერიუმიანი ურთიერთმოქმედი ატრიბუტების/ფაქტორების/კრიტერიუმების გადაწყვეტილების მიღების მოდელებისთვის აიგო შოკეს აგრეგირების ოპერატორზე დაფუძნებული განზოგადოებული აგრეგირების ოპერატორები ექსპერტული შეფასებების წარმოდგენის ინტუიციონისტური და პითაგორული ფაზი გარემოებებისთვის. ახალი აგრეგირების ოპერატორების უპირატესობა შოკეს ტიპის აგრეგირებებზე საშუალებას იძლევა აიგოს უფრო მაღალი სანდოობის გადაწყვეტილების მიღების მხარდამჭერი სისტემები.

I თავში, სადისერტაციო ნაშრომის კვლევის მეთოდოლოგიის ფარგლებში, მიმოხილვის სახით, გადმოცემულია ის ძირითადი მიდგომები და მეთოდები, რომლებიც ეხება ნაშრომის კვლევითი შედეგების მიმართულებას. ესენია: 1. უზუსტობისა და განუზღვრელობის მოდელირების საკითხები ექსპერტული არასაკმარისი მონაცემების ანალიზის პრობლემატიკაში. 2. ფაზი სიმრავლეთა, ფაზი რიცხვების, ფაზი ოპერატორების, ფაზი მიმართებებისა და ფაზი ლოგიკის თეორიების ზოგადი მიმოხილვა. 3. დემპსტერ-შეიფერის თეორია, როგორც ნდობისა

და დასაჯერობის, აუცილებლობისა და შესაძლებლობის მონოტონური დუალური ზომების გენერაციის მთავარი ბაზა. 4. დემპსტერ-შეიფერის ტემპორალიზებული სტრუქტურის შესახებ. 5. ძირითადი გასაშუალოების ოპერატორების აღწერა. 6. OWA-ს ტიპის ოპერატორების აღწერა: OWG, GOWA, IOWA, IGOWA, IOWG, POWA, AsPOWA, UIOWA, UIHA და სხვა ოპერატორები. 7. აგრეგირების ოპერატორების კონსტრუირების თავისებურებანი დემპსტერ-შეიფერის თეორიის მიახლოებაში.

II თავში განვითარებული კვლევა ეხება ასოცირებული ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი შეწონილი გასაშუალოებისა (As-P-IFWA) და ასოცირებული ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი შეწონილი გეომეტრიულ (As-P-IFWG) აგრეგირების ოპერატორებს. აგრეგირებებში განუზღვრელობა წარმოდგენილია ფაზი ზომით. გადაწყვეტილების მიმღები პირების და/ან ექსპერტების შეფასებები, როგორც აგრეგირების ოპერატორების არგუმენტები წარმოდგენილია ინტუიციონისტურ ფაზი სიდიდეებში. მოყვანილია მტკიცებულებები გავრცობების კორექტულობაზე. კერძოდ, ნაჩვენებია რომ, თუ აგრეგირებებში ფაზი ზომის როლში ავიღებთ მეორე რიგის ქვედა და ზედა ტევადობებს, მაშინ ახალი გავრცობები დაემთხვევა შოკეს აგრეგირების ოპერატორებს ინტუიციონისტურ ფაზი გარემოში. ხოლო თუ ფაზი ზომის როლში ავიღებთ ალბათურ ზომას, მაშინ ახალი გავრცობები დაემთხვევა ალბათურ შეწონილ აგრეგირების ოპერატორს ინტუიციონისტურ ფაზი გარემოში. დადგენილია შეუღლებული კავშირები აგებულ ოპერატორებს შორის. აგებულია კავშირები აგრეგირების ოპერატორებსა და დუალურ (T_p,S_p) და $(T_{\min},S_{\max})$ სამკუთხა ნორმების კომპოზიციებს შორის. გავრცობილი ზოგიერთი ოპერატორები გამოყენებულია ერთი ბიზნეს–წამოწყების ტიპის დაგეგმარების გადაწყვეტილების მიღების ამოცანაში. მაგალითზე ნაჩვენებია ახალი აგრეგირებების უპირეტესობები შოკეს აგრეგირების გასაშუალებისა და გეომეტრიულ ოპერატორებთან მიმართებაში.

III თავში წარმოდგენილია პითაგორული ფაზი TOPSIS მიდგომა ექსტრემალურ გარემოში ობიექტის განთავსება-შერჩევის დაგეგმვის ამოცანაში პარამეტრების შესახებ ექსპერტული ცოდნის ფორმირებისა და წარმოდგენის მიზნით. ამ მიდგომაში შემოთავაზებულია შეფასების ფუნქციაზე (Score Function) დაფუძნებული შედარების

მეთოდი, რათა დადგინდეს პითაგორული ფაზი დადებითი იდეალური ამონახსნი და პითაგორული ფაზი უარყოფითი იდეალური ამონახსნი. აგებულ ფაზი TOPSIS-ის აგრეგირებებზე დაყრდობით ფორმულირდება ახალი მიზნობრივი ფუნქცია. კონსტრუირებული კრიტერიუმი მაქსიმალურად ზრდის ექსტრემალურ სიტუაციებში კატასტროფის ზონებში დახმარების პუნქტებისთვის მომსახურე ცენტრების განთავსება-შერჩევის დაგეგმვის საიმედოობას. ეს კრიტერიუმი მეორე კრიტერიუმთან ერთად - შერჩეული ცენტრების რაოდენობის მინიმიზაცია - ქმნის ობიექტების განთავსების მრავალკრიტერიუმიან სიმრავლური დაფარვის ამოცანას. შექმნილია ინტუიციონისტური ფაზი TOPSIS-ის მიდგომის სარეალიზაციო სქემა, რომელიც კონსტრუირებული ბი-კრიტერიუმიანი ამოცანისთვის უზრუნველყოფს პარეტო ოპტიმუმების მიღებას ყველა შესაძლო დასაშვები ვარიანტებიდან დაფარვის შემთხვევაში პარეტოს წერტილების ფიქსაციით. ამ მიდგომით მიღებული შედეგების ილუსტრირებისთვის წარმოდგენილია შემდეგი დაგეგმარების ამოცანა: საქართველოს რომელიმე ჰიპოთეტურ ქალაქში სამაშველო დახმარების ობიექტების განთავსება-შერჩევის დაგეგმვის სიმულაციური მაგალითი. უფრო ზუსტად, მაგალითში მოცემულია საგანგებო სიტუაციებში ხანძარსაწინააღმდეგო სადგურების განთავსების დაგეგმვის ამოცანა, სპეციფიკური მოთხოვნის წერტილების - მნიშვნელოვანი ინფრასტრუქტურული ობიექტების უწყვეტი მუშაობის უზრუნველყოფის მიზნით.

Abstract

The thesis work presents methods and schemes based on newly constructed aggregation operators to clarify decision making and reduce decision making risks, including cases of interacting and/or interrelated attributes/factors/criteria in an Intuitionistic or Pythagorean Fuzzy Uncertain Environment. Using them, it is possible to select the optimal solution(s) with high reliability or to make a full ranking of possible alternatives in important practical tasks in such areas as: strategic management, medical diagnostics and prognosis (expected outcome of the disease), business, monitoring/control of complex industrial processes, planning of rehabilitation works in the damaged areas as a result of extreme and anomalous events, etc.

For this purpose, were constructed new extensions of Aggregation Operators based on Choquet Aggregation Operators for presentations expert evaluations of decision making models of multi-expert, multi-criteria interacting attributes / factors / criteria in the Intuitionistic and Pythagorean Fuzzy Environment. The advantages of new aggregation operators over Choquet - type aggregations allow for the construction of higher reliability decision support systems.

In chapter I, within the framework of the dissertation research methodology, provides an overview of the main approaches and methods that relate to the direction of the dissertation research results. these are: 1. issues of imprecision and uncertainty modeling in the expertise of the analysis of insufficient data. 2. a general overview of Fuzzy Sets, Fuzzy Numbers, Fuzzy Operators, Fuzzy relations and Fuzzy Logic theories. 3. Dempster–Shafer's theory as the main basis for the generation of Monotonous Dual Measures of Belief and Plausibility, Necessity and Possibility. 4. on the temporalized structure of the Dempster–Shafer. 5. description of major averaging operators. 6. description of OWA type operators: OWG, GOWA, IOWA, IGOWA, IOWG, POWA, AsPOWA, UIOWA, UIHA and other operators. 7. peculiarities of the construction of Aggregation Operators in the approach of Dempster–Shafer Theory.

The research developed in Chapter II deals with the Associated Probability Intuitionistic Fuzzy Weighted Averaging (As-P-IFWA) and the Associated Probability Intuitionistic Fuzzy Weighted Geometric (As-P-IFWG) Aggregation Operators. Uncertainty in aggregations is represented by Fuzzy Measure. Estimates of decision makers and/or experts as arguments of Aggregation Operators are presented in an Intuitionistic Fuzzy Values. Evidence of the correctness of the extensions is given. In particular, it is shown that if we take the lower and upper capacities of order two in the role of Fuzzy Measure in the Aggregations, then the new extensions will coincide with the Choquet Aggregation Operators in the Intuitionistic Fuzzy Environment. And if we take the Probability Measure in the role of Fuzzy Measure, then the new

extensions will coincide with the Probabilistic Weighted Aggregation Operator in an Intuitionistic Fuzzy Environment. Conjugate connections between built operators are established. Connections are constructed between Aggregation Operators and compositions of dual (T_p, S_p) and $(T_{\min}, S_{\max})$ triangular norms. Some of the new extended operators are successfully used in the business start-up decision making problem. The example shows the advantages of new aggregations over Choquet Averaging and Geometric Operators.

Chapter III presents a Pythagorean fuzzy TOPSIS approach for formation and representing of expert's knowledge on the parameters of facility location planning in extreme environment. In this approach proposed a score function based comparison method to identify the Pythagorean fuzzy positive ideal solution and the Pythagorean fuzzy negative ideal solution. Based on the constructed fuzzy TOPSIS aggregation a new objective function is formulated. The constructed criterion maximizes the reliability of facility location planning of service centers for assistance points in disaster zones in extreme situations. This criterion together with second criterion - minimization of number of selected centers creates the multi-objective facility location set covering problem. Intuitionistic Fuzzy TOPSIS approach implementation scheme is designed to provide Pareto optimizations for a constructed bi-criterion problem by fixing Pareto points in case of coverage from all possible options. To illustrate the results obtained with this approach, the following planning task is presented: A simulation example of placement and selection of rescue facilities in one of the hypothetical cities of Georgia. More precisely, the example shows the task of planning the location of fire stations in emergency situations, in order to ensure the continuous operation of specific demand points - critical infrastructure objects.

სარჩევი

შესავალი

საკვლევი პრობლემა

ურთიერთმოქმედი და/ან ურთიერთდამოკიდებული მრავალ ატრიბუტების/ფაქტორების/კრიტერიუმების შემთხვევაში, ინტუიციონისტური ან პითაგორული ფაზი განუზღვრელობის პირობებში გადაწყვეტილების მიღების გარემოს დაზუსტებისა და გადაწყვეტილების მიღების რისკების შემცირების მიზნით საჭიროა შემუშავდეს აგრეგირების ოპერატორებზე დაფუძნებული მეთოდები და სქემები, რომელთა გამოყენებით შეიქმნება შესაძლებლობა მაღალი სანდოობით შეირჩეს ოპტიმალური გადაწყვეტილება/გადაწყვეტილებები მნიშვნელოვან პრაქტიკულ ამოცანებში ისეთი მიმართულებებით, როგორიცაა: სტრატეგიული მენეჯმენტი, სამედიცინო დიაგნოსტიკა და სხვა.

კვლევის მნიშვნელობა და აქტუალობა

სადისერტაციო თემის აქტუალობა განისაზღვრება სტრატეგიული მენეჯმენტსა და სხვა გადაწყვეტილების მიღების პრობლემატიკაში ობიექტურ მონაცემთა სიმცირის ან საერთოდ არ არსებობის გამო, რაც შესასწავლი ობიექტის სირთულით ან მონაცემთა შეგროვების სხვადასხვა მიზეზებით (დროის ნაკლებობა, მონაცემთა არასაიმედობა, მონაცემთა შეგროვების მაღალი ფინანსური მოთხოვნები, მონაცემთა შეგროვების განუზღვრელი გარემო და სხვა) განისაზღვრება. გამოიყოფა მონაცემთა შეგროვების განუზღვრელი გარემო, როდესაც ფაქტიურად ობიექტურ მონაცემთა არ არსებობის გამო საქმეში ერთვება ექსპერტი და მისი ცოდნა. ანუ საქმე გვაქვს ფაზი განუზღვრელობასთან, რომელიც წარმოშობს გადაწყვეტილების მიღების რისკებს. აქტუალურია შემუშავდეს მეთოდები და სქემები, რათა დაზუსტდეს გადაწყვეტილების მიღების გარემო და შემცირდეს აღნიშნული რისკები. ამ მიზნით მრავალექსპერტული, მრავალკრიტერიუმიანი ურთიერთმოქმედი ფაქტორების/კრიტერიუმების გადაწყვეტილებს მიღების მოდელებისთვის აიგო შოკეს აგრეგირების ოპერატორზე დაფუძნებული განზოგადოებული აგრეგირების ოპერატორები ექსპერტული შეფასებების წარმოდგენის ინტუიციონისტური და პითაგორული ფაზი გარემოებებისთვის. ახალი აგრეგირებების უპირატესობა შოკეს

ტიპის აგრეგირებებზე საშუალებას იძლევა აიგოს უფრო მაღალი სანდოობის გადაწყვეტილების მიღების მხარდამჭერი სისტემები.

კვლევის მიზანი და ამოცანები

გადაწყვეტილების მიღების რთულ ამოცანებში, განუზღვრელ პირობებში, როდესაც ობიექტური მონაცემები არასაკმარისია ან საერთოდ არ არსებობს და არსებული მონაცემები მხოლოდ ექსპერტული ბუნებისაა, ეს უკანასკნელი წარმოდგენილი იქნება შემდეგი ორი პოლუსით: ერთი მხრივ ეს არის ფაზი უზუსტობის კატეგორიები: ფაზი სიმრავლეები, ფაზი რიცხვები, ფაზი მიმართებები, ხოლო მეორე მხრივ ეს არის ფაზი განუზღვრელობის ზომები, როგორიცაა: შესაძლებლობითი ზომები, დემპსტერ-შეიფერის ნდობის სტრუქტურის ფოკალური ალბათობის ზომა, ალბათური ზომები, სუჯენოს λ ზომები და სხვა.

საჭიროა შევიმუშავოთ გადაწყვეტილების მიღების აგრეგირების თანამედროვე ინსტრუმენტები (ოპერატორები, სქემები, ევრისტიული მიდგომები და ა.შ.), რომლებიც შესაძლო ალტერნატივების რანჟირების და/ან ოპტიმალური გადაწყვეტილების შერჩევის მიზნით კონდენსირებას გაუკეთებენ აღნიშნულ პოლუსებს შესაძლო გადაწყვეტილებების, ალტერნატივების სკალარულ (რიცხვით) სიდიდეებში. განიხილება შემთხვევა, როდესაც გადაწყვეტილების მიღების ფაქტორებს/კრიტერიუმებს შორის შეინიშნება მაღალი ხარისხის კორელაცია/ურთიერთდამოკიდებულება.

დღევანდელ დღეს გადაწყვეტილების მიღების აგრეგირების ინსტრუმენტებიდან გამორჩეულია ე.წ. OWA-ს ტიპის, მათ შორის შოკეს სასრული მეორე რიგის ტევადობის (შოკეს სასრული ინტეგრალის) აგრეგირების ოპერატორები, რომლებიც კლასიკურ ვარიანტში აგრეგირებას უკეთებენ ობიექტურ განუზღვრელ, ალბათურ გარემოს. ჩვენს მიერ განვითარდა OWA-ს ტიპის ახალი განზოგადოებები. კერძოდ, შოკეს გასაშუალებისა და გეომეტრიული შეწონილი აგრეგირების ოპერატორების განზოგადოებები, როდესაც განუზღვრელობის და უზუსტობის პოლუსები წარმოდგენილია ფაზი გარემოში. როგორიცაა: ფაზი უზუსტობების შემთხვევა, რაც გულისხმობს მონაცემების წარმოდგენას სამკუთხა ფაზი, ტრაპეციული ფაზი, ინტუიციონისტურ და პითაგორულ ფაზი რიცხვებში. ფაზი

განუზღვრელობის პოლუსი კი წარმოდგენილია ისეთი მონოტონური (ფაზი) ზომებით, როგორიცაა: შესაძლებლობის ზომა, ნდობისა და დასაჯერობის ზომები, დემპსტერ-შეიფერის ნდობის სტრუქტურის ფოკალური ალბათობა, სუჯენოს λ ზომა და ა.შ. როგორც პრაქტიკა აჩვენებს, ხშირად OWA-ს ტიპის, მათ შორის *შოკეს აგრეგირების ოპერატორით სარგებლობა მაღალი ხარისხის მქონე ურთიერთმოქმედი ატრიბუტების/ფაქტორების/კრიტერიუმების მქონე გადაწყვეტილების მიღების მოდელებში ნაკლები სანდოობის შედეგების მომტანია,* რადგან ამ აგრეგირებებში მხოლოდ გარკვეული, მცირე რაოდენობა ატრიბუტთა ურითიერთქმედებების გათვალისწინებაა შესაძლებელი. *ამ პრობლემის გადაწყვეტა მოხერხდა ჩვენი ახალი ოპერატორების შემოტანით,* რომლებიც ზემოთ აღნიშნული აგრეგირების ოპერატორების გარკვეულ გავრცობებს წარმოადგენენ.

შესწავლილია ახლად წარმოდგენილი გადაწყვეტილების მიღების აგრეგირების ოპერატორები ინტუიციონისტური და პითაგორული ფაზი გარემოებებისთვის. გამოკვლეულია ანალოგიური ოპერატორების როგორც გასული წლების, ასევე თანამედროვე სამეცნიერო ლიტერატურა. აქცენტი გაკეთებულია OWA-ს ტიპის აგრეგირების ოპერატორზე და მათ განზოგადოებებზე განუზღვრელ გარემოში, როდესაც საექსპერტო ინფორმაციის უზუსტობა წარმოდგენილია ფაზი სიდიდეებით, ხოლო განუზღვრელობის ზომად კი აღებულია მონოტონური ფაზი ზომები. შესწავლილია მათი ანალიზური თვისებები. გამოიკვეთა მათი გამოყენების ასპექტები.

ნაშრომი ასევე ეხება კონკრეტულ ევრისტიკულ გადაწყვეტილების მიღების მეთოდებს, როგორიცაა: დისკრიმინაციული ანალიზი, ექსპერტონების მეთოდი და სხვა განზოგადოებული აგრეგირების ოპერატორების ჩანერგვა და მათი ტემპორალურ სქემებზე გადაყვანა გადაწყვეტილების მიღების რისკების შემცირების მიზნით. მრავალექსპერტული შემთხვევებისთვის, ტემპორალურ დემპსტერ-შეიფერის სტრუქტურაში, ექსპერტული ინფორმაციების დასაზუსტებლად აიგო კონსენსუსის გარემო მათი ცოდნების კონდენსირების მიზნით.

საკვლევი საკითხები

სადოქტორო პროექტის ირგვლივ საკვლევი ამოცანების პრობლემატიკის საკითხები შემდეგში მდგომარეობს:

- განუზღვრელობა და უზუსტობა გადაწყვეტილების მიღების სისტემებში;
- ფაზი რიცხვები, ფაზი მიმართებები, ფაზი ლოგიკური დასკვნის წესები;
- ფაზი განუზღვრელობა და მათი ზომები; შესაძლებლობისა და აუცილებლობის ზომები; მათი ალბათური წარმოდგენა;
- დემპსტერ-შეიფერის ნდობის სტრუქტურა; მონოტონური (ფაზი) ზომების მიმოხილვა; ნდობისა და დასაჯერობის ზომები;
- ფაზი სტატისტიკის ძირითადი ასპექტები;
- განუზღვრელ გარემოში გადაწყვეტილების მიღების აგრეგირების ოპერატორები;
- განუზღვრელ გარემოში გადაწყვეტილების მიღების OWA-ს ტიპის აგრეგირების ოპერატორები;
- გადაწყვეტილების მიღების OWA-ს ტიპის აგრეგირების ოპერატორების განზოგადოება ფაზი განუზღვრელ გარემოში;
- ფაზი განუზღვრელ გარემოში ევრისტიკული გადაწყვეტილების მიღების მეთოდები;
- ევრისტიკული გადაწყვეტილების მიღების მეთოდებში გადაწყვეტილების მიღების განზოგადოებული OWA-ს ტიპის აგრეგირების ოპერატორების ჩადგმები;
- ევრისტიკული გადაწყვეტილების მიღების მეთოდების ტემპორალიზაცია დემპსტერ-შეიფერის ნდობის სტრუქტურაში;
- ტემპორალური საექსპერტო ცოდნის კონსენსუსების მეთოდოლოგიის შემუშავება ევრისტიკული გადაწყვეტილების მიღების გარემოში.

სადისერტაციო ნაშრომის სტრუქტურა

I თავში, როგორც შესავალ ნაწილში, წარმოდგენილია კვლევის მეთოდოლოგია და განხილულია კვლევის საწყისი ძირითადი ეტაპები, ისეთ საბაზისო საკითხებზე როგორიცაა: 1) განუზღვრელობა და უზუსტობა გადაწყვეტილების მიღების სისტემებში; 2) ფაზი მათემატიკა (ფაზი სიმრავლეები, ოპერაციები ფაზი სიმრავლეებზე, ფაზი რიცხვები, ფაზი ოპერატორები, ფაზი მიმართებები, ფაზი ლოგიკა); 3) ფაზი განუზღვრელობა და მათი ზომები; 4) გადაწყვეტილების მიღების აგრეგირების ოპერატორები;

II თავი დისერტაციის ძირითადი ნაწილია და ეთმობა მთავარი კვლევითი შედეგების წარმოდგენას. ურთიერთმოქმედი და დამოკიდებული ატრიბუტების/ფაქტორების/კრიტერიუმების მქონე გადაწყვეტილების მიღების მოდელების ინტუიციონისტური ფაზი გარემოსთვის აგებულია ახალი აგრეგირების ოპერატორები, რომლებიც შოკეს აგრეგირების ოპერატორის გავრცობად შეიძლება ჩაითვალოს. ამ გავრცობებს წარმოადგენს ასოცირებული ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი წონითი ოპერატორები, რომელთა გამოყენება დემონსტრირებულია ბიზნეს–წამოწყების ტიპის გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებსა თუ სხვა სტრატეგიული დანიშნულების სისტემებში. კერძოდ, შემოღებულია ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი წონითი გასაშუალოების (P-IFWA) და ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი წონითი გეომეტრიული (P-IFWG) ოპერატორების ახალი გავრცობები $-As-F_M$, $F \in \{P-IFWA, P-IFWG\}$, $M \in \{\vee,\wedge\}$, სადაც განუზღვრელობა წარმოდგენილია ფაზის ზომის სახით. განსაზღვრებები შედგენილია ფაზი ზომის ასოცირებული ალბათობების კლასთან (APC) მიმართებაში. აგებული ახალი $As-F_M$ ოპერატორების შესაძლებლობების გამოყენების მიზნით საილუსტრაციოდ წარმოდგენილია ბიზნეს–წამოწყების ტიპის ამოცანა ფაზი ჯგუფური გადაწყვეტილების მიღების მოდელთან მიმართებაში. შესწავლილია ახალი ოპერატორების ანალიზური თვისებები.

III თავიც ახალი შედეგების წარმოდგენას ეხება. ოღონდ თუ მეორე თავში წარმოდგენილი იყო აქსიომატიკაზე დაფუძნებული ახალი აგრეგირების ოპერატორები ინტუიციონისტური ფაზი გარემოსთვის და მათი შესაძლებლობების გამოყენება

რეალურ ამოცანებში, ამჯერად მესამე თავში წარმოდგენილია გადაწყვეტილების მიღების ცნობილი ევრისტიული მიდგომის TOPSIS-ის მოდიფიცირებული მეთოდი ოღონდ პითაგორული ფაზი გარემოსთვის. განხილულია ამ მეთოდის გამოყენების შესაძლებლობები კატასტროფის შედეგად დაზიანებულ გეოგრაფიულ ზონაში ობიექტების განთავსების ამოცანაში. გადამწყვეტია ახალი მეთოდის გამოყენების გაზრდილი სანდოობა ასეთ ზონებში დაზიანებული უბნების დახმარების და მომსახურეობის სერვის-ცენტრების ადგილმდებარეობების შერჩევის ამოცანაში. იგი ეფუძნება პითაგორულ ფაზი რიცხვებში წარმოდგენილ ექსპერტთა ცოდნას შესაძლო სერვის–ცენტრებზე მათი მომსახურეობისთვის შერჩევის მახასიათებელ ფაქტორებთან მიმართებაში და ითვალისწინებს ადგილმდებარეობის ვარგისიანობის შეფასებას აგებული ახალი ფაზი TOPSIS მიდგომის გამოყენებით. აგებული მიდგომა ილუსტრირებულია რიცხვითი მაგალითით.

დანართის სახით წარმოდგენილია საკვლევი ობიექტების ირგვლივ აგებული ზოგიერთი ამოცანის მხარდამჭერი პროგრამული კოდები, რომელიც შესრულებულია Python დაპროგრამების ენაზე (მეორე და მესამე თავის ამოცანების ფარგლებში მაგალითების რიცხვითი გადაწყვეტისათვის).

ნაშრომი მთავრდება დასკვნით და გამოყენებული ლიტერატურით. ასევე მოთხოვნისამებრ წარმოდგენილია დისერტანტის მიერ სადისერტაციო ნაშრომის ფარგლებში გამოქვეყნებული ნაშრომების სრული სია.

თავი I. კვლევის მეთოდოლოგია

1.1. განუზღვრელობა და უზუსტობა გადაწყვეტილების მიღების სისტემებში

გადაწყვეტილების მიღება ჩვენი ცხოვრების ყოველდღიურობის უმნიშვნელოვანესი ნაწილია. მთავარ სირთულეს წარმოადგენს ის ფაქტი, რომ გადაწყვეტილების მიღების თითქმის ყველა ამოცანას (პრობლემურ საკითხს) გააჩნია რამდენიმე ატრიბუტი/ფაქტორი/კრიტერიუმი და ხშირ შემთხვევაში ურთიერთმოქმედი, შესაძლოა ურთიერთსაწინააღმდეგო (კონფლიქტური) ხასიათის. მსგავსი პრობლემური ამოცანების ამოსახსნელად მასშტაბური კვლევებია ჩატარებული. ასეთი კვლევები იყოფა ორ ძირითად კატეგორიად:

1. მრავალ ატრიბუტული/მრავალ კრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღება (MADM/ MCDM – Multiple Attribute (Criteria) Decision Making);
2. მრავალ ობიექტური გადაწყვეტილების მიღება (MODM – Multiple Objective Decision Making);

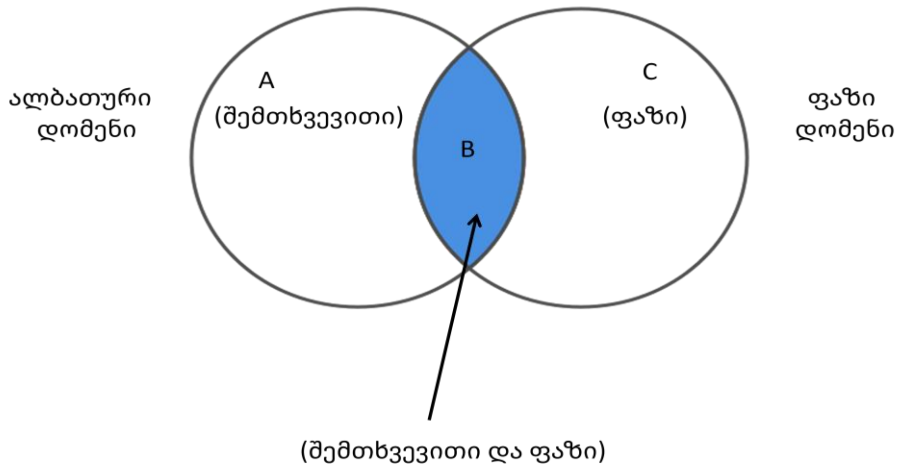
პრაქტიკული თვალსაზრისით, MADM/MCDM–ის ამოცანები ასოცირდება ისეთ პრობლემურ საკითხებთან, რომელთა ალტერნატივების რაოდენობაც წინასწარ განსაზღვრულია. გადაწყვეტილების მიმღები პირის (DM – Decision Maker) პასუხისმგებლობაა მიზნის მისაღწევად (ალტერნატივებისთვის პრიორიტეტის მინიჭება/ოპტიმალური ალტერნატივის შერჩევა/ალტერნატივების რანჟირება) ააგოს მოქმედებათა სქემა ან მეთოდი. მეორეს მხრივ, MODM–ის ამოცანა არ ასოცირდება ისეთ პრობლემურ საკითხებთან, რომელთა ალტერნატივების რაოდენობაც წინასწარ ცნობილია. DM–ის მთავარი ამოცანაა ააგოს (იგულისხმება ამორჩევის პროცესის დეველოპმენტი) „ყველაზე“ პერსპექტიული ალტერნატივა შეზღუდული რესურსების პირობებში.

MADM/MCDM და MODM–ის მეთოდები და მასთან ასოცირებული პროგრამული სისტემები მუდმივად განხილვის საგანია და სისტემატურად მიმდინარეობს მათი კლასიფიცირება. სირთულე ჩნდება მაშინ, როდესაც გადაწყვეტილების მიმღები პირი ერთზე მეტია. სასურველი გადაწყვეტილების მისაღებად უნდა მოხდეს სხვადასხვა ინტერესთა ჯგუფებს შორის შეთანხმება, ხოლო მათ როგორც წესი ხშირად განსხვავებული მიზნები გააჩნიათ.

ადვილი შესამჩნევია ისიც, რომ განუზღვრელობა ყოველთვის არსებობს რეალურ სამყაროში. გადაწყვეტილების მიღების ანალიზის ამოცანებში განუზღვრელობის შესწავლა ძირითადად ხდება ალბათობის თეორიის და/ან ფაზი (მონოტონური) ზომების თეორიის საფუძველზე. პირველი გადაწყვეტილების მიღებისას ატარებს სტოქასტურ ხასიათს, ხოლო ეს უკანასკნელი ასახავს ექსსპერტის ქცევის სუბიექტურობას, მისი ცოდნიდან გამომდინარე გაკეთებული შეფასებების საიმედოობას, დასაჯერობას და ა.შ. მიიჩნევა, რომ გადაწყვეტილების მიღების სტოქასტური მიდგომა, მაგალითად, როგორიცაა გადაწყვეტილების მიღების სტატისტიკური ანალიზი, ვერ ახდენს განუზღვრელობის შეფასებას სუბიექტური ინფორმაციის გამოყენების შემთხვევაში მისი ბუნების გამო. ფაზი, იგივე მონოტონური ზომების თეორია არის შესანიშნავი საშუალება ექსპერტული შეფასებების განუზღვრელობის, ხოლო ფაზი სიმრავლეთა თეორია კი იგივე ექსპერტული შეფასებებიდან მიღებული უზუსტობის მოდელირებისთვის. ეს ფაქტი დამოკიდებულია მენტალურ ფენომენზე, რომელიც არც შემთხვევითია და არც სტოქასტური. სურ. 1.1.1.–ზე ნაჩვენებია წარმოდგენის ორი განსხვავებული დომენი, სადაც C იმ არეს განსაზღვრავს, რომელთანაც გვაქვს შეხება ამ ნაშრომის ფარგლებში. ადამიანები აქტიურად არიან ჩართული გადაწყვეტილების მიღების პროცესის ანალიზში. გადაწყვეტილების მიღების რაციონალური მეთოდები ითვალისწინებს ადამიანის სუბიექტურობის თვისებას და არ გულისხმობს მხოლოდ ობიექტური ალბათური ზომების გამოყენებას. სწორედ ასეთმა დამოკიდებულებამ ადამიანის ქცევის განუზღვრელობასთან მიმართებაში მიგვიყვანა გადაწყვეტილების მიღების ანალიზის ახალ ტიპის კვლევებამდე, რომელსაც ვუწოდებთ ფაზი გადაწყვეტილების მიღებას (Fuzzy Decision Making).

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მრავალ ატრიბუტული გადაწყვეტილების მიღების ამოცანები ხშირად გვხვდება ყოველდღიურ ცხოვრებაში. მაგალითად: 1. ავარჩიოთ ახალი სამსახური (იგულისხმება გვაქვს რამდენიმე შემოთავაზება). არჩევანის გაკეთება დამოკიდებულია მრავალ ატრიბუტზე, როგორიცაა: ხელფასი, ოფისის ადგილმდებარეობა, განვითარების შესაძლებლობება, კოლეგები, ორგანიზაციის კულტურა და ა.შ. 2. შევიძინოთ ახალი მანქანა. ვთქვათ გვაქვს ინფორმაცია

რამდენიმე მანქანის შესახებ მანქანების ყიდვა–გაყიდვის პორტალიდან. არჩევანის გაკეთება დამოკიდებულია რამოდენიმე ატრიბუტზე, როგორიცაა: ღირებულება, უსაფრთხოების ნორმები, კომფორტული სალონი, მანქანის გამრბენი და ა.შ. ასისტენტ პროფესორის თანამდებობაზე პიროვნების არჩევის კრიტერიუმები შეიძლება დაეფუძნოს კვლევისა და სწავლების უნარებს, აკადემიურ ხარისხს და/ან აკადემიურობის ზოგად ფონს, პრაქტიკულ საქმიანობას და ა.შ.



სურ. 1.1.1. გადაწყვეტილების მიღების პროცესის ორი განსხვავებული დომენი.

MADM/MCDM–ის ამოცანის წარმოდგენისათვის გამოიყენება შემდეგი დაშვებები და აღნიშვნები:

- ვთქვათ ცნობილია ალტერნატივები: $S = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$, $m(\geq 2)$ -თი აღვნიშნოთ შესაძლო ალტერნატივების სასრული სიმრავლე.

- ვთქვათ ცნობილია ატრიბუტები: $R = \{R_1, R_2, ..., R_n\}$, $n(\geq 2)$ -თი აღვნიშნოთ ატრიბუტების სიმრავლე.

- ვთქვათ ცნობილია გადაწყვეტილების მიღების მატრიცა: $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ -თი აღვნიშნოთ გადაწყვეტილების მიღების მატრიცა, სადაც a_{ij} არის S_i ალტერნატივის შეფასება (ზომა) R_j ატრიბუტის მიმართ, $i = 1, ..., m; \ j = 1, ..., n$.

კომპლექსურ ამოცანებში a_{ij} –ის მნიშვნელობა არ შეიძლება ზუსტად შეფასდეს. ანუ რეალურ სამყაროში გადაწყვეტილების მიღება დაფუძნებულია ინფორმაციაზე, რომელიც შეიძლება იყოს *განუზღვრელი (Uncertain)* ან/და *არაზუსტი (Imprecise).*

განვიხილოთ თითოეული მათგანის თავისებურება დეტალურად.

განუზღვრელი ცოდნა (Uncertain Knowledge):

- აღიწერება განუზღვრელობის არაზუსტი პრედიკატებით;

- შეუძლებელია სიმართლის მნიშვნელობის ექსტრაპოლაცია მტკიცებულებიდან;

მაგალითები:

- მე *მჯერა*, რომ ჩემი წონაა 55 კგ;
- *არ არის გამორიცხული,* რომ მე კიდევ ერთი სასერთიფიკატო გამოცდა ჩავაბარო;
- *მოსალოდნელია,* რომ ამ მანქანამ 200 კმ/ს სიჩქარე განავითაროს;

არაზუსტი ცოდნა (Imprecise Knowledge):

- აღიწერება არაზუსტი პრედიკატებით;

- ცვლადებს ენიჭება არაზუსტი მნიშვნელობები;

მაგალითი:

- მისი ასაკი 30–დან 35 წლამდეა;

შენიშვნა: „30–დან 35 წლამდე" წარმოადგენს არაზუსტ სიმრავლეს.

განუზღვრელობა vs უზუსტობა

- ინფორმაცია შეიძლება იყოს ზუსტი
  – მისი სიმაღლეა 1.90 სმ;
- ინფორმაცია შეიძლება იყოს არაზუსტი, მაგრამ არა განუზღვრელი
  – ის მაღალია;
- ინფორმაცია შეიძლება იყოს განუზღვრელი, მაგრამ არა არაზუსტი
  – მე მჯერა, რომ მისი სიმაღლეა 1.90 სმ;
- ინფორმაცია შეიძლება იყოს განუზღვრელი და არაზუსტი
  – მე მჯერა, რომ ის მაღალია;

განუზღვრელობისა და უზუსტობის წყაროები შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

- *არაკვალიფიცირებული/არაგაზომვადი ინფორმაცია (Unquantifiable/Non-quantifiable Information)*
  - ტკივილი;
  - დაღლა;
  - ახალი მანქანის ფასი ადვილად განისაზღვრება, ხოლო მანქანის უსაფრთხოება ან კომფორტი არ არის რაოდენობრივი მაჩვენებელი. უსაფრთხოების სისტემა და კომფორტი, როგორც წესი, გამოხატულია ლინგვისტური ტერმინების სახით, როგორიცაა „კარგი“, „საშუალო“, „სრულიად უსაფრთხო“ და ა.შ. ეს უკანასკნელი თვისებრივი მონაცემებია (ინდივიდუალური სუბიექტური განსჯის საგანი).
- *არასრული ინფორმაცია (Incomplete Information)*
  - მედიცინაში ანალიზების ნაკლებობა;
  - პაციენტის შესახებ კლინიკური ჩანაწერების ნაკლებობა;
  - პაციენტს არ შეუძლია გაიხსენოს ყველა სიმპტომი;
  - მართვის სისტემებში საჭირო ველების ნაკლებობა;
  - სწრაფად მოძრავი ობიექტის სიჩქარე ზოგიერთი ხელსაწყოს მეშვეობით შეიძლება გაიზომოს როგორც "დაახლოებით 100 კმ/სთ", მაგრამ არა "ზუსტად 100 კმ/სთ".
- *არასაიმედო ინფორმაცია (Unreliable Information)*
  - არასანდო გაზომვები და ანალიზი;
  - არაზუსტი ინსტრუმენტები;
- *არასწორი ინფორმაცია (Erroneous Information)*
  - არასწორად აღწერილი სიმპტომები;
  - პაციენტი გამიზნულად ატყუებს ინფექციონისტს გამოვლენილი სიმპტომების შესახებ;

- *ხმა და დამახინჯება (Noise and Distortion)*
  - ხელოვნური მხედველობა;
  - ხმის ამომცნობი სისტემები;
  - სახეთა ამოცნობის სისტემები და ა.შ.
- *არახელმისაწვდომი ინფორმაცია (Nonobtainable Information)*
  - ზოგჯერ ზუსტი მონაცემების მიღება შესაძლებელია, მაგრამ მისი მოპოვება შეუძლებელია და ვიღებთ მიახლოებით მნიშვნელობებს. მაგალითად, ეს არის შემთხვევა, როდესაც მონაცემები სენსიტიური ხასიათისაა (ინდივიდუალური საბანკო ანგარიში, ხელფასის ოდენობა, ახალგაზრდა ქალის ასაკი და ა.შ.). ამ შემთხვევაში გამოიყენება ზოგიერთი "მიახლოებითი" მონაცემი ან ლინგვისტური აღწერილობა.
- *ცოდნა (Knowledge)*
  - *განუზღვრელობა/უზუსტობა (Uncertainty/Imprecision)*
    - "თუ მას აქვს თავის ძლიერი ტკივილი, ალბათ მას აქვს კორონავირუსი";
    - "პაციენტს აქვს მაღალი ტემპერატურა";
  - *წინააღმდეგობრივი (Contradictory)*
    - პიროვნება 1: "თუ მას აქვს თავის ძლიერი ტკივილი, ალბათ მას აქვს კორონავირუსი";
    - პიროვნება 2: "შესაძლებელია აგრეთვე, რომ მას არ ქონდეს კორონავირუსი";
  - *ნაწილობრივი უცოდინრობა (Partial Ignorance).* ხელმისაწვდომია მხოლოდ ინფორმაციის გარკვეული ნაწილი.
  - *არადეტერმინისტული სამყარო (Non-deterministic World).* ზოგიერთ სიტუაციაში გავრცელებული კანონებით და წესებით ხელმძღვანელობა შეუძლებელია. ყველა პაციენტი ინდივიდუალურია, ერთიდაიმავე მიზეზებმა შეიძლება გამოიწვიოს სხვადასხვა ეფექტი სხვადასხვა პაციენტებში ყოველგვარი მიზეზის გარეშე.

საყურადღებოა კვლევის მიმართულებები, რომლებიც გადაწყვეტილების მიღების სისტემებში იყენებენ უზუსტობას და განუზღვრელობას:

- სამედიცინო დიაგნოსტიკა და პროგნოზი (დაავადების მოსალოდნელი შედეგი);
- ფინანსური პროგნოზი;
- პროსპექტირება (მაღაროები, ბენზინი);
- გამოსახულების ინტერპრეტაცია და ხელოვნური მხედველობა;
- ხმის ამოცნობა;
- რთული ინდუსტრიული პროცესების მონიტორინგი / კონტროლი და ა.შ.

ამრიგად, გადაწყვეტილების მიღების რთულ ამოცანებში, განუზღვრელ პირობებში, როდესაც ობიექტური მონაცემები არასაკმარისია ან საერთოდ არ არსებობს და არსებული მონაცემები მხოლოდ ექსპერტული ბუნებისაა, საჭიროა შევიმუშაოთ გადაწყვეტილების მიღების აგრეგირების თანამედროვე ინსტრუმენტები (ოპერატორები, სქემები და ა.შ.), რომლებიც კონდენსირებას გაუკეთებენ წარმოდგენილ პოლუსებს (ფაზი უზუსტობის კატეგორიები, ფაზი განუზღვრელობის ზომები) შესაძლო გადაწყვეტილებების, ალტერნატივების სკალარულ სიდიდეებში. ეს სიდიდეები ქმნიან ალტერნატივების არჩევის ოპტიმალურ გზებს. ცხადია ეს შესაძლებლობები რანჟირებას გაუკეთებს ალტერნატივებს საუკეთესოდან უარესი გადაწყვეტილებისკენ.

1.2. ფაზი მათემატიკა

ფაზი მათემატიკის (Fuzzy Mathematics) წარმოშობა და განვითარება უკავშირდება ლოთფი ზადეს (Lotfi A. Zadeh) სახელს. იგი იყო ამერიკის შეერთებულ შტატებში მოღვაწე აზერბაიჯანელი მათემატიკოსი, პროგრამისტი, ელექტროინჟინერი, ხელოვნური ინტელექტის მკვლევარი და კალიფორნიის ბერკლის უნივერსიტეტის ინფორმატიკის ემერიტუს-პროფესორი. 1965 წლის სემინარულ ნაშრომში სათაურით "Fuzzy Sets", რომელიც ჟურნალ „Information and Control“-ში (Zadeh, 1965) დაიბეჭდა, ზადემ განავრცო კანტორის ორობითი სიმრავლეთა თეორია (Cantor’s Binary Set Theory) მიკუთვნების ხარისხების შემოღებით. ასეთ სიმრავლეებს

უწოდა მან ფაზი სიმრავლეები და მათზე შემოიღო მთელი რიგი ოპერაციები. შემოიღო რა ე.წ. “ლინგვისტური ცვლადის” ცნება და დაუშვა, რომ მისი მნიშვნელობები (ტერმები) ფაზი სიმრავლეებია. ზადემ ააგო ინტელექტუალური საქმიანობის აქტივობის აღმწერი აპარატი, რომელიც უზრუნველყოფს მოცემული განუზღვრელობის პირობებში აქტივობის შედეგების რაოდენობრივ აღწერას. ეს იყო მნიშვნელოვანი ნაბიჯი, რადგან არსებული ზოგიერთი მათემატიკური თეორიის ახალ მიმდინარეობებს ჩაეყარა საფუძველი. ძალიან მალე გავრცელდა მისი შეხედულებები თანამედროვე მათემატიკის თითქმის ყველა დომენზე და გაჩნდა ისეთი ახალი დისციპლინები როგორიცაა: ფაზი ტოპოლოგია (Fuzzy Topology), ფაზი არითმეტიკა (Fuzzy Arithmetic), ფაზი ალგებრული სტრუქტურები (Fuzzy Algebraic Structures), ფაზი დიფერენციალური კალკულუსი (Fuzzy Differential Calculus), ფაზი გეომეტრია (Fuzzy Geometry), ფაზი მიმართებათა კალკულუსი (Fuzzy Relational Calculus), ფაზი მონაცემთა ბაზები (Fuzzy Databases) და ფაზი გადაწყვეტილების მიღება (Fuzzy Decision Making). თავდაპირველად, ძირითადად, კლასიკური მათემატიკური დომენების პირდაპირი ფაზიფიკაციები დაიწყო კანტორისეული კომპლექსური სიმრავლეთა თეორიის ოპერაციების ზადეს max-min-ური გაფართოებებით ჩანაცვლების ხარჯზე. გასული საუკუნის 80-იანი წლები ხასიათდებოდა შესაძლო ფაზიფიკაციების გაფართოებით სამკუთხა ნორმებისა (Triangular Norms) და კონორმების (Triangular Conorms) აღმოჩენის გამო, ხოლო 90-იანი წლებიდან უფრო ღრმა ანალიზი ჩატარდა ფაზი სტრუქტურების აქსიომატიზაციის შესწავლით, სხვადასხვა მოდელებს შორის კავშირების ძიებით არაზუსტი და განუზღვრელი ინფორმაციის წარმოსადგენად. წარმოდგენილი სადოქტორო ნაშრომი სწორედ განუზღვრელ გარემოში გადაწყვეტილების მიღების სხვადახვა მოდელების შესწავლას და ახალი მეთოდოლოგიის გამოყენებას ემსახურება, რომელიც თავის მხრივ დაფუძნებულია ფაზი მათემატიკაზე. ნაშრომში გაშუქებულია და წარმოდგენილია უახლესი და თანამედროვე ლიტერატურის მიმოხილვის ჯანსაღი ნაზავი, რომელიც კვლევის მიმდინარე შედეგებთან ერთად შეიძლება გახდეს ერთ–ერთი საუკეთესო გზამკვლევი ამ სფეროში ახალმოსულთათვის შემდგომი განვითარების თვალსაზრისით.

ამრიგად, ფაზი სიმრავლეების მათემატიკური თეორია, რომელიც ზადემ შემოგვთავაზა ფაზი ცნებებისა და ცოდნის აღწერის, ასევე მათ ბაზაზე ოპერირებისა და გადაწყვეტილების მიღების საშუალებას იძლევა. ცხადია ამ თეორიაზე დაფუძნებული ახალი კომპიუტერული სისტემები აფართოებენ მომავალი თაობების კომპიუტერების გამოყენების არეალს, რაც ბოლო პერიოდში ფაზი ლოგიკის სწრაფმა განვითარებამ განაპირობა.

ქვემოთ მოცემულ თავებში წარმოდგენილი განსაზღვრებები/განმარტებები და მტკიცებულებები განხილულია ზადეს (Zadeh, 1965; 1968; 1979; 1993;), დუბუას და პრადის (Dubois & Prade, 1978; 1979; 1980; 1983; 1988), კლირის და ფოლგერის (Klir & Folger, 1988), კაუპფანის (Kaufmann, 1975; 1988), კაუპფანის და გუპტას (Kaufmann & Gupta, 1985), ზიმერმანის (Zimmermann, 1985; 1987), გრაბიჩის (Grabisch, 1995; 1996; 1997), იაგერის (Yager, 1988; 1992; 1993; 1997; 1998; 1999; 2004; 2013; 2014; 2017; 2018) ნაშრომებზე დაყრდნობით.

1.2.1. ფაზი სიმრავლეები

განსაზღვრება 1.2.1.1: *ფაზი სიმრავლე (Fuzzy Set)* A–ს X–ზე ეწოდება წყვილთა ერთობლიობას $(x,\mu_A(x))$, სადაც $x\in X$, $\mu_A(x)| X\to[0,1]$. ფუნქცია μ_A–ს ეწოდება *მიკუთვნების ფუნქცია.*

$$A=\{(x_1,0.1),(x_2,0.3),(x_3,0),(x_4,0.9),(x_5,1)\}. \qquad (1.2.1.1)$$

შენიშვნა: μ_A - სიმრავლის ამომწურავი მახასიათებელია, ამიტომ A და μ_A აღნიშვნები ხშირად გაიგივებულია ერთმანეთთან.

განსაზღვრება 1.2.1.2: ფაზი სიმრავლეს ეწოდება *ცარიელი (Empty),* თუ $\mu_\varnothing(x)=0,\quad \forall x\in X$.

განსაზღვრება 1.2.1.3: ფაზი სიმრავლეს ეწოდება *უნივერსალური (Universal),* თუ $\mu_U(x)=1,\quad \forall x\in X$.

განსაზღვრება 1.2.1.4. $\sup\limits_{x\in X}\mu_A(x)$ სიდიდეს A ფაზი სიმრავლის *სიმაღლე* ეწოდება.

განსაზღვრება 1.2.1.5: ფაზი სიმრავლეს ეწოდება *ნორმალური (Normal),* თუ მისი სიმაღლე 1-ის ტოლია, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას *სუბნორმალური* ეწოდება.

განსაზღვრება 1.2.1.6. A ფაზი სიმრავლეს ეწოდება *უნიმოდალური,* თუ $\mu_A(x)=1$ მხოლოდ ერთი ელემენტისათვის X -დან.

არაცარიელი სუბნორმალური ფაზი სიმრავლე დაიყვანება ნორმალურ სახეზე შემდეგი გარდაქმნის საშუალებით: $\dfrac{\mu_A(x)}{\sup\limits_{x\in X}\mu_A(x)}$

განსაზღვრება 1.2.1.7: A ფაზი სიმრავლის α *დონის სიმრავლე* ეწოდება X უნივერსალური სიმრავლის ჩვეულებრივ ქვესიმრავლეს

$$A_\alpha=\left\{x\in X\mid\mu_A\left(x\right)\geq\alpha\right\},\quad\alpha\in\left[0;1\right].$$

მკაცრი α დონის სიმრავლე განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$A_\alpha{}^S=\left\{x\in X\mid\mu_A\left(x\right)>\alpha\right\},\quad\alpha\in[0;1[\,.$$

α დონის სიმრავლის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ფაზი სიმრავლის *მატარებელი (Support),* რომელიც აღინიშნება როგორც $\operatorname{supp}A=\left\{x\in X\mid\mu_A\left(x\right)>0\right\}$.

A ფაზი სიმრავლის *გადასვლის წერტილი* ეწოდება $x\in X\mid\mu_A\left(x\right)=0.5$.

A ფაზი სიმრავლესთან *უახლესი ჩვეულებრივი სიმრავლე* $\underline{A}$ $\forall x\in X$ -თვის განისაზღვრება ასე:

$$\mu_{\underline{A}}(x)=\begin{cases}0,\ if\ \mu_A(x)<0.5\\1,\ if\ \mu_A(x)>0.5\\0\,or1,\ if\ \mu_A(x)=0.5\end{cases}.$$

განსაზღვრება 1.2.1.8: X-ში $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ფაზი სიმრავლეების – *ამოზნექილი კომბინაცია (Convex Combination)* ეწოდება A ფაზი სიმრავლე–ს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\mu_A\left(x\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_{A_i}\left(x\right)\ \ \forall x\in X$, სადაც $\lambda_i\geq 0\mid\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1.$

შევნიშნოთ, რომ ჩვეულებრივი სიმრავლეთათვის ამ ოპერაციას აზრი არა აქვს.

ზადეს განზოგადოების პრინციპი. ფაზი სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი იდეა - განზოგადოების პრინციპი, რომელსაც გააჩნია ევრისტიკული შინაარსი და ასახვებზე ფაზი სიმრავლეთა თეორიის არეალის გამოყენების დიდ შესაძლებლობას იძლევა.

ვთქვათ, გვაქვს მართვების სიმრავლე U და მასზე მოცემულია ასახვა $f:U \to V$, ეს ასახვა აღწერს მართვადი სისტემის ფუნქციონირებას. მაშინ $u \in U$ მართვის სახე $v = f(u)$ არის ამ სისტემის რეაქცია მართვის არჩევის მიმართ. თუ არჩეული მართვა აღწერილია ფაზისებურად, მაგალითად როგორც მართვათა U სიმრავლეში განსაზღვრული ფაზი სიმრავლე μ_U, მაშინ ასეთი მართვისას სისტემის რეაქციის საპოვნელად, ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ μ_U-ს სახე V სიმრავლეში f ასახვის დროს. სხვანაირად რომ ვთქვათ, უნდა გავაფართოვოთ f ასახვის განსაზღვრის არე U სიმრავლის ყველა ფაზი სიმრავლეთა კლასზე.

ასახვათა განსაზღვრის არის ფაზი სიმრავლეთა კლასზე გაფართოების ხერხს ეწოდება განზოგადოების პრინციპი.

ზადემ შემოგვთავაზა განზოგადოების ასეთნაირი პრინციპი: ვთქვათ, $\varphi: X \to Y$ მოცემული ასახვაა და A ფაზი სიმრავლეა X-ში $\mu_A\left(x\right)$ მიკუთვნების ფუნქციით. მაშინ A ფაზი სიმრავლის φ სახე ასახვისას არის B ფაზი სიმრავლე Y-ში შემდეგი მიკუთვნების ფუნქციით: $\mu_B(y) = \sup\limits_{x\in\varphi^{-1}(y)} \mu_A(x), \quad y \in Y$, სადაც $\varphi^{-1}(y) = \left\{x \in X \mid \varphi(x) = y\right\}$.

იმ შემთხვევაში, როცა თვითონ φ ასახვა ფაზია, ანუ $x \in X$ ელემენტს შეესაბამება არა Y სიმრავლის კონკრეტული ელემენტი, არამედ ზოგადად Y-ში განსაზღვრული ფაზი სიმრავლე, მაშინ ეს ფაქტი აღიწერება შემდეგნაირად: $\mu_\varphi : X \times Y \to \left[0,1\right]$. ასე, რომ ფუნქცია $\mu_\varphi\left(x_0, y\right)$ (ფიქსირებული $x = x_0$ -ისათვის) წარმოადგენს Y-ში ფაზი სიმრავლის მიკუთვნების ფუნქციას, რომელიც არის x_0 ელემენტის ფაზი სახე მოცემული ასახვისას.

განსაზღვრება 1.2.1.9: $A \subset X$ ფაზი სიმრავლის *სახე* $\mu_\varphi : X \times Y \to [0,1]$ ასახვისას ეწოდება B ფაზი სიმრავლეს შემდეგი მიკუთვნების ფუნქციით: $\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min\left\{\mu_A(x), \mu_\varphi(x,y)\right\}$.

ცხადია, რომ კერძო შემთხვევაში, როცა μ_φ ჩვეულებრივი ასახვაა $\varphi : X \to Y$ (ანუ $\mu_\varphi(x,y) = 1,$ თუ $y = \varphi(x)$ და $\mu_\varphi(x,y) = 0$) ყველა (x,y) დანარჩენი წყვილებისათვის ეს განსაზღვრება გვაძლევს $\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x),$ რაც შეესაბამება, ზემოთმოცემულ ზადეს განზოგადოების პრინციპს.

1.2.2. ოპერაციები ფაზი სიმრავლეებზე

ვთქვათ, A და B ფაზი სიმრავლეებია X –ში შესაბამისად μ_A და μ_B მიკუთვნების ფუნქციებით.

განსაზღვრება 1.2.2.1: ვიტყვით, რომ B *შეიცავს* A*-ს* $A \subseteq B$, თუ $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ $\forall x \in X$ ე.ი. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x)$ $\forall x \in X$.

B მკაცრად შეიცავს A-ს, თუ

$$A \subset B \Leftrightarrow \left(\mu_A(x) \le \mu_B(x)\right) \wedge \exists x_0 \in X \mid \mu_A(x_0) < \mu_B(x_0).$$

განსაზღვრება 1.2.2.2: A და B ფაზი სიმრავლეებს ეწოდება *ტოლი (Equal),* თუ $\forall x \in X : \mu_A(x) = \mu_B(x).$ ე.ი. $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$ $\forall x \in X$.

ადგილი აქვს შემდეგ თვისებას: $A \subseteq B \Rightarrow suppA \subseteq suppB$.

შენიშვნა: შებრუნებული პირობა - $suppA \subseteq suppB \not\Rightarrow A \subseteq B$ არ არის მართებული.

ფაზი სიმრავლეებზე ოპერაციების შემოღებისას უნდა გვახსოვდეს, რომ ფაზი სიმრავლეთა კლასი მოიცავს აგრეთვე ჩვეულებრივ სიმრავლეებსაც. ამიტომ შემოთავაზებული განმარტებები კერძო შემთხვევაში უნდა შეესაბამებოდნენ ჩვეულებრივი სიმრავლეთა თეორიაში მიღებულ განმარტებებს. რა თქმა უნდა ეს არ ეხება ისეთ ოპერაციებს, რომლებსაც ჩვეულებრივი სიმრავლეებისათვის აზრი არა აქვს, მაგალითად კონცენტრირებისა და გაჭიმვის ოპერაციებს.

განსაზღვრება 1.2.2.3 (გაერთიანება 1): X –ში A და B ფაზი სიმრავლეთა **გაერთიანება** (**Union**) წარმოადგენს $A \cup B$ - ფაზი სიმრავლეს შემდეგი მიკუთვნების ფუნქციით $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \ \forall x \in X$.

განსაზღვრება 1.2.2.4 (გაერთიანება 2): X –ში A და B ფაზი სიმრავლეთა გაერთიანება წარმოადგენს $A \cup B$ - ფაზი სიმრავლეს შემდეგი მიკუთვნების ფუნქციით $\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1, \ if \ \ \mu_A(x) + \mu_B(x) \geq 1 \\ \mu_A(x) + \mu_B(x), \ otherwise \end{cases} \Leftrightarrow \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}, \ \forall x \in X$.

განსაზღვრება 1.2..2..5 (თანაკვეთა 1): X –ში A და B ფაზი სიმრავლეთა *თანაკვეთა (Intersection)* წარმოადგენს ფაზი სიმრავლე $A \cap B$-ს შემდეგნაირი მიკუთვნების ფუნქციით: $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \ \forall x \in X$.

განსაზღვრება 1.2..2.6 (თანაკვეთა 2): X –ში A და B ფაზი სიმრავლეთა თანაკვეთა წარმოადგენს ფაზი სიმრავლე $A \cap B$ -ს შემდეგნაირი მიკუთვნების ფუნქციით: $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \forall x \in X$.

თანაკვეთის ამ ორი განმარტების განსხვავება ყველაზე მნიშვნელოვნად ვლინდება იმ შემთხვევაში, როცა $B \subseteq A$ ანუ $\mu_B(x) \leq \mu_A(x), \ \forall x \in X$. მართლაც, თანაკვეთის პირველი განმარტების თანახმად $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_B(x), \ \forall x \in X$ ანუ A ფაზი სიმრავლის მიკუთვნების ფუნქცია $\mu_A(x)$ ფაქტობრივად "არ მონაწილეობს" თანაკვეთის მიკუთვნების ფუნქციის განსაზღვრაში, ხოლო თანაკვეთის მეორე განმარტებისას მიკუთვნების ფუნქცია ყოველთვის შეიცავს ორთავე სიმრავლეთა მიკუთვნების ფუნქციებს.

პრაქტიკულ ამოცანებში შეიძლება სასარგებლო აღმოჩნდეს ფაზი სიმრავლეთა მატარებლების ასეთი თვისება.

ლემა 1.2.2.1: გაერთიანების და თანაკვეთის ნებისმიერი განსაზღვრებისათვის სამართლიანია:

$$supp(A \cup B) = (suppA) \cup (suppB)$$

$$supp(A \cap B) = (suppA) \cap (suppB).$$

განსაზღვრება 1.2.2.7: X–ში A ფაზი სიმრავლის *დამატება (Complement)* წარმოადგენს ფაზი სიმრავლე $\overline{A}$-ს შემდეგნაირი მიკუთვნების ფუნქციით:

$$\mu_{\overline{A}}\left(x\right)=1-\mu_A(x),\ \forall x\in X\ .$$

უნდა აღინიშნოს, რომ ჩვეულებრივი სიმრავლეებისაგან განსხვავებით ზოგად შემთხვევაში $A\cap\overline{A}\neq\varnothing$ და $A\cup\overline{A}\neq U$.

განსაზღვრება 1.2.2.8: X–ში A და B ფაზი სიმრავლეთა *სხვაობა (Distinction)* წარმოადგენს ფაზი სიმრავლე A \B -ს შემდეგნაირი მიკუთვნების ფუნქციით:

$$\mu_{A\backslash B}(x)=\begin{cases}\mu_A(x)-\mu_B(x),\ if\ \ \mu_A(x)\geq\mu_B(x)\\ 0,\ otherwise\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\max\left\{0,\mu_A(x)-\mu_B(x)\right\},\ \forall x\in X\ .$$

განსაზღვრება 1.2.2.9: X –ში A ფაზი სიმრავლის *კონცენტრირების ოპერაცია* $CON(A)$ განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\mu_{CON\,A}(x)=\mu_A^2(x),\ \forall x\in X$.

კონცენტრირების ოპერაციის გამოყენება სინამდვილეში ნიშნავს ამ სიმრავლის “ფაზიფიცირების” შემცირებას. რეალურ ამოცანაში ეს შეიძლება ნიშნავდეს ახალი, დამატებითი ინფორმაციის შემოსვლას, რაც საშუალებას იძლევა უფრო ზუსტად (მკაფიოდ, ცხადად) აღვწეროთ მოცემული ფაზი სიმრავლე.

განსაზღვრება 1.2.2.10: X -ში A ფაზი სიმრავლის *გაჭიმვის ოპერაცია* DIL A განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\mu_{DIL\,A}(x)=\mu_A^{0.5}(x),\ \forall x\in X$.

გაჭიმვის ოპერაცია შეიძლება გამოყენებული იქნას ინფორმაციის დაკარგვის სიტუაციის მოდელირებისათვის.

განსაზღვრება 1.2.2.11: ფაზი სიმრავლეთა *დეკარტული ნამრავლი* $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$, სადაც $A_i\subset X_i,\ i=\overline{1,n},$ განისაზღვრება როგორც, ფაზი სიმრავლე A დეკარტულ ნამრავლში $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ შემდეგნაირი მიკუთვნების ფუნქციით:

$$\mu_A\left(x\right)=\min\left\{\mu_{A_1}(x_1),\mu_{A_2}(x_2),\ldots,\mu_{A_n}\left(x_n\right)\right\},\ x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\in X^n\ .$$

გავიხსენოთ, რომ X -ში A ფაზი სიმრავლის α დონის სიმრავლე განისაზღვრება შემდეგნაირად: $A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\},\ \alpha \in [0,1]$.

მნიშვნელოვანი თვისება: $\alpha_2 \geq \alpha_1 \Rightarrow A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_1}$

ვთქვათ, $(A \cup B)_\alpha$ და $(A \cap B)_\alpha$ არის A და B ფაზი სიმრავლეების გაერთიანების და თანაკვეთის α დონის სიმრავლეები. განვიხილოთ მათი კავშირი A_α და B_α დონის სიმრავლეებთან.

თუ გამოვიყენებთ გაერთიანება 1 და თანაკვეთა 1-ის განსაზღვრებებს, მივიღებთ, რომ $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$, $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$. ხოლო, გაერთიანება 2 და თანაკვეთა 2-ის განსაზღვრებების გამოყენებისას მივიღებთ მხოლოდ $(A \cup B)_\alpha \supset A_\alpha \cup B_\alpha$, $(A \cap B)_\alpha \subset A_\alpha \cap B_\alpha$.

შენიშვნა: ოთხივე თანაფარდობების მარჯვენა ნაწილებში გამოყენებულია გაერთიანების და თანაკვეთის ჩვეულებრივი ოპერაციები, თითოეული მათგანი შეიძლება განხილული იქნას, როგორც ნებისმიერი განმარტებით (1) ან (2) განსაზღვრული ოპერაციების კერძო შემთხვევა.

ვთქვათ, $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)_\alpha$ A_i, $i=1,2,\ldots,n$ - ფაზი სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის α დონის სიმრავლეა, მაშინ დეკარტული ნამრავლის განმარტებიდან გამომდინარეობს $(A_1 \times \ldots \times A_n)_\alpha = (A_1)_\alpha \times \ldots \times (A_n)_\alpha$, ანუ, დეკარტული ნამრავლის α დონის სიმრავლე წარმოადგენს მოცემულ ფაზი სიმრავლეთა α -დონის სიმრავლეების დეკარტულ ნამრავლს.

ფაზი სიმრავლეები ჩვეულებრივი სიმრავლეების განზოგადოებას წარმოადგენს, ანუ მათ შორის განსაზღვრული კავშირი არსებობს. თუ როგორაა დაკავშირებული ფაზი და ჩვეულებრივი სიმრავლეები ანუ ამ კავშირის ფორმალიზაციის საშუალებას გვაძლევს *დეკომპოზიციის უმნიშვნელოვანესი თეორემა:* X-ში ნებისმიერი ფაზი სიმრავლე A შეიძლება დაშლილ იქნეს α დონის სიმრავლეებათ $A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$.

1.2.3. ფაზი ოპერატორები

ფაზი სიმრავლეთა თეორიის პრაქტიკული გამოყენებისათვის უდიდესი მნიშვნელობა აქვს ფაზი ინფორმაციის აგრეგირების ოპერატორების აგებას. ზემოთ განხილული ოპერატორები - გაერთიანება, თანაკვეთა, დამატება და ა.შ. დამაკმაყოფილებლად მუშაობენ როცა ფაზი სიმრავლეების განსაზღვრის არე არის R^1. მაგრამ ლინგვისტიკური ხასიათის ცვლადების დროს, მაგალითად: მშვენიერი, სიმპათიური, ლამაზი, ძალიან ლამაზი, ულამაზესი და ა.შ., ეს ოპერატორები არასრულფასოვნად ასახავენ მრავალნიშნა ლინგვისტურ ცვლადებს. ამიტომ დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს განზოგადოებული ფაზი ოპერატორების ე.ი. გაერთიანების, თანაკვეთის, დამატების პარამეტრიზებული ოპერატორების აგებას, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს ავსახოთ ოპერანდების მოქნილობა, მათი ცვლილების ხარისხი და ა.შ.

თანაკვეთის და გაერთიანების ფაზი ოპერატორების ფორმირების საკმაოდ ზოგადი მიდგომა მდგომარეობს მათ განსაზღვრაში, კერძოდ კი სამკუთხა ნორმების და კონორმების კლასში.

განსაზღვრება 1.2.3.1: *სამკუთხა ნორმა, შემოკლებით t - ნორმა* ეწოდება ორადგილიან ფუნქციას $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები. თუ $(a,b,c,d)\in[0,1]$:, მაშინ

1. $T(a,b)=T(b,a)$ – კომუტატიურობა;
2. $T(a,T(b,c))=T(T(a,b),c)$ – ასოციაციურობა;
3. $T(a,b)\le T(c,d)$, თუ $a\le c$ და $b\le d$ – მონოტონურობა;
4. $T(a,1)=a$ – სასაზღვრო პირობა.

ადვილად მტკიცდება, რომ $T(0,0)=0$.

t- ნორმა T არის *არქიმედული,* თუ იგი უწყვეტია და $T(a,a)\le a$ ყველა $a\in[0,1]$. t – ნორმა არის *მკაცრი,* თუ იგი მკაცრად ზრდადია ორივე არგუმენტის მიმართ, ანუ პირობა 3)-ში არამკაცრი უტოლობა შეიცვლება მკაცრით.

t–ნორმების მაგალითებია ($a,b \in [0,1]$):

$\min\{a,b\}$;

$T_p(a,b) = ab$;

$T_m(a,b) = \max\{0, a+b-1\}$ (Lukasiewicz);

$$T_w(a,b) = \begin{cases} a, \ if \ \ b=1 \\ b, \ if \ \ a=1 \\ 0 \ \ otherwise \end{cases}.$$

ასეთი $t-$ ნორმებისათვის მართებულია უტოლობა:

$$T_w(a,b) \le T_m(a,b) \le T_p(a,b) \le \min\{a,b\}.$$

განსაზღვრება 1.2.3.2: *სამკუთხა კონორმა, შემოკლებით* t *–კონორმა* ეწოდება ფუნქციას $C:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები $(a,b,c,d)\in[0,1]$:

1. $C(a,b) = C(b,a)$ – კომუტაციურობა
2. $C(a,C(b,c)) = C(C(a,b),c)$ – ასოციაციურობა
3. $C(a,b) \ge C(c,d)$, თუ $a \ge c$ და $b \ge d$ – მონოტონურობა
4. $C(a,0) = a$ – სასაზღვრო პირობა

ადვილად მტკიცდება, რომ $C(1,1)=1$.

t –კონორმა არის *არქიმედული,* თუ იგი უწყვეტია და $C(a,a) \ge a$. იგი არის მკაცრი თუ იგი მკაცრად ზრდადია ორივე არგუმენტების მიმართ, ანუ პირობა 3-ში არამკაცრი უტოლობა შეიცვლება მკაცრით.

t–კონორმები წარმოადგენენ ფუნქციათა კლასს, რომლებიც დუალურია t –ნორმების მიმართ. ნებისმიერი t –კონორმა C შეიძლება იქნას მიღებული t –ნორმა $T-$ დან შემდეგი გარდაქმნით $C(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b)$.

t –კონორმების მაგალითებია:

$\max\{a,b\}$;

$C_p(a,b) = a + b - ab$;

$C_m(a,b)=\min\{1,a+b\}$ (Lukasiewicz);

$$C_S(a,b)=\begin{cases} a, \; if \;\; b=0 \\ b, \; if \;\; a=0 \\ 1 \; otherwise \end{cases}.$$

სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$C_s(a,b)\geq C_m(a,b)\geq C_p(a,b)\geq \max\{a,b\}.$$

გარდა ფაზი ოპერატორებისა, რომლებიც შედიან t –ნორმებისა და t – კონორმების კლასში, არსებობს გასაშუალების ოპერატორები $M:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$, რომლებიც აკმაყოფილებენ ძირითად მოთხოვნას:

$$M\left(\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}\right)\in\left[\min\left\{\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}\right\},\max\left\{\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}\right\}\right].$$

მოვიყვანოთ რამოდენიმე მაგალითი:

$M_A\left(\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_{A_i}$ – საშუალო არითმეტიკული;

$M_H\left(\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}\right)=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_{A_i}}}$ – საშუალო ჰარმონიული;

$M_G\left(\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}\right)=\sqrt[n]{\left(\mu_{A_1}\cdot,...,\cdot\mu_{A_n}\right)}$ – საშუალო გეომეტრიული;

$M_{\min}\left(\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}\right)=\min\left\{\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}\right\}$;

$M_{\max}\left(\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}\right)=\max\left\{\mu_{A_1},...,\mu_{A_n}\right\}$.

1.2.4. ფაზი მიმართებები და ოპერაციები ფაზი მიმართებებზე

განსაზღვრება 1.2.4.1: X სიმრავლეზე *ფაზი მიმართება* $\tilde{R}$ ეწოდება $X\times X$ დეკარტული ნამრავლის ფაზი ქვესიმრავლეს, რომლის მიკუთვნების ფუნქციაა $\mu_{\tilde{R}}:X\times X\rightarrow[0,1]$. აქ $\mu_{\tilde{R}}(x,y)$ გამოხატავს x და y ელემენტებს შორის მიმართების შესრულების ხარისხს.

ბუნებრივია, რომ ჩვეულებრივი მიმართება შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ფაზი მიმართების კერძო შემთხვევა, რომლის მიკუთვნების ფუნქცია იღებს მხოლოდ 0 და 1 მნიშვნელობებს.

თუ ფაზი მიმართება $\tilde{R}$ განსაზღვრულია სასრულ X სიმრავლეზე, მაშინ მისი მიკუთვნების ფუნქცია $\mu_{\tilde{R}}$ წარმოადგენს კვადრატულ მატრიცას, რომლის ელემენტებია ნებისმიერი რიცხვები [0;1] ინტერვალიდან.

ისევე როგორც ჩვეულებრივი მიმართება, ფაზი მიმართება შეიძლება აღვწეროთ ფაზი (ორიენტირებული) გრაფის საშუალებით, ასეთი გრაფის ყველა რკალს მიწერილი აქვს რიცხვი [0;1] ინტერვალიდან.

ფაზი სიმრავლის მსგავსად ფაზი მიმართებასაც გააჩნია მისი მატარებელი (Support).

განსაზღვრება 1.2.4.2: X სიმრავლეზე $\tilde{R}$ *ფაზი მიმართების მატარებელი* ეწოდება $X \times X$ დეკარტული ნამრავლის შემდეგნაირ ქვესიმრავლეს

$$supp\,\tilde{R} = \left\{(x,y) \,|\, (x,y) \notin X \times X,\ \mu_{\tilde{R}}(x,y) > 0\right\}.$$

X სიმრავლეზე ფაზი მიმართების მატარებელი შეიძლება განხილული იქნას როგორც ჩვეულებრივი მიმართება, რომელიც აკავშირებს ისეთ (x,y) წყვილებს, რომელთათვის მოცემული ფაზი მიმართების შესრულების ხარისხი არ უდრის 0.

თუ საქმე გვაქვს სასრულ X სიმრავლესთან, მატარებელის მატრიცა შეიძლება მიღებულ იქნეს საწყისი ფაზი მიმართების მატრიცაში ყველა არანულოვანი ელემენტების ერთიანებით შეცვლის გზით.

ფაზი მიმართებებს აგრეთვე გააჩნიათ α-დონის სიმრავლეები, რომლებიც ძალზედ ხელსაყრელია გადაწყვეტილებათა მიღების ამოცანების რეალიზაციისას.

განსაზღვრება 1.2.4.3: X სიმრავლეზე $\tilde{R}$ ფაზი მიმართების α დონის სიმრავლე განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\tilde{R}_\alpha = \left\{(x,y) \,|\, (x,y) \in X \times X,\ \mu_R(x,y) \geq \alpha\right\},\ \ \alpha \in [0;1].$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ X სიმრავლეზე $\tilde{R}$ ფაზი მიმართების α დონის სიმრავლე წარმოადგენს ჩვეულებრივ მიმართებას, რომელიც აკავშირებს (x,y)

წყვილებს, რომელთათვის მოცემული ფაზი მიმართების შესრულების ხარისხი არანაკლებია α -ზე.

თუ საქმე გვაქვს სასრულ X სიმრავლესთან, α დონის სიმრავლის მატრიცა შეიძლება მიღებულ იქნეს საწყისი ფაზი მიმართების მატრიცაში ყველა α-ზე არანაკლებ ელემენტების ერთიანებით, ხოლო დანარჩენი ელემენტის ნულებით შეცვლის გზით.

ვთქვათ X სიმრავლეზე მოცემულია ორი ფაზი მიმართება $\tilde{R}_1$ და $\tilde{R}_2$.

განსაზღვრება 1.2.4.4 (გაერთიანება 1): $\tilde{R}_1$ და $\tilde{R}_2$ ფაზი მიმართებათა გაერთიანება $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2}(x, y) = \max\{\mu_{\tilde{R}_1}(x, y),\ \mu_{\tilde{R}_2}(x, y)\},\ \forall (x, y) \in X \times X.$$

განსაზღვრება 1.2.4.5 (გაერთიანება 2): $\tilde{R}_1$ და $\tilde{R}_2$ ფაზი მიმართებათა გაერთიანება $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2}(x, y) = .\begin{cases} 1, if\ \mu_{\tilde{R}_1}(x, y) + \mu_{\tilde{R}_2}(x, y) \geq 1 \\ \mu_{\tilde{R}_1}(x, y) + \mu_{\tilde{R}_2}(x, y),\ otherwise \end{cases} \quad \forall (x, y) \in X \times X.$$

შენიშვნა: ორივე გაერთიანება ინარჩუნებს ერთიანებს.

განსაზღვრება 1.2.4.6 (თანაკვეთა 1): $\tilde{R}_1$ და $\tilde{R}_2$ ფაზი მიმართებათა თანაკვეთა $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2}(x, y) = \min\{\mu_{\tilde{R}_1}(x, y), \mu_{\tilde{R}_2}(x,y)\},\ \forall (x, y) \in X \times X .$$

განსაზღვრება 1.2.4.7 (თანაკვეთა 2): $\tilde{R}_1$ და $\tilde{R}_2$ ფაზი მიმართებათა თანაკვეთა $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2}(x, y) = \mu_{\tilde{R}_1}(x, y) \cdot \mu_{\tilde{R}_2}(x,y),\ \forall (x, y) \in X \times X .$$

შენიშვნა: ორივე თანაკვეთა ინარჩუნებს ნულებს.

განსაზღვრება 1.2.4.8: ვიტყვით, რომ ფაზი მიმართება $\tilde{R}_1$ შეიცავს ფაზი მიმართებას $\tilde{R}_2$; $\tilde{R}_2 \subseteq \tilde{R}_1$, თუ ნებისმიერი $(x, y) \in X \times X$ სრულდება უტოლობა:

$$\mu_{\tilde{R}_2}(x, y) \leq \mu_{\tilde{R}_1}(x, y) .$$

განსაზღვრება 1.2.4.9: ფაზი მიმართების დამატება $\tilde{\tilde{R}}$ განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(x,y)=1-\mu_{\tilde{R}}(x,y), \forall (x,y)\in X\times X$.

შენიშვნა: ნულები იცვლება ერთიანებით, ხოლო ერთიანები ნოლებით. გადასვლის წერტილები $(\mu = 0.5)$ უცვლელი რჩება.

განსაზღვრება 1.2.4.10: $\tilde{R}$ ფაზი მიმართების შებრუნებული მიმართება $\tilde{R}^{-1}$ განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\mu_{\tilde{R}^{-1}}(x,y)=\mu_{\tilde{R}}(y,x), \ \forall (x,y)\in X\times X$.

განსაზღვრება 1.2.4.11: $\tilde{R}$ ფაზი მიმართებასთან უახლოესი მკაფიო მიმართება $\underline{\tilde{R}}$ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\underline{\tilde{R}}=\begin{cases}1, if\ \mu_{\tilde{R}}(x,y)>0.5\\ 0, if\ \mu_{\tilde{R}}(x,y)<0.5 \qquad \forall (x,y)\in X\times X.\\ 0\vee 1, if\ \mu_{\tilde{R}}(x,y)=0.5\end{cases}$$

ფაზი მიმართებების გაერთიანების, თანაკვეთის და ჩართვის ოპერაციები აკმაყოფილებენ შემდეგ იგივეობებს:

განსაზღვრება 1-ის შემთხვევაში:

$\tilde{R}\cup\tilde{R}=\tilde{R},\ \ \tilde{R}\cap\tilde{R}=\tilde{R}$ _ იდენპოტენტციურობა;

$\tilde{R}\cup\tilde{S}=\tilde{S}\cup\tilde{R},\ \ \tilde{R}\cap\tilde{S}=\tilde{S}\cap\tilde{R}$ _ კომუტაციურობა;

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{R}\cap\left(\tilde{S}\cap\tilde{T}\right)=\left(\tilde{R}\cap\tilde{S}\right)\cap\tilde{T}\\ \tilde{R}\cup\left(\tilde{S}\cup\tilde{T}\right)=\left(\tilde{R}\cup\tilde{S}\right)\cup\tilde{T}\end{array}\right\}\text{ \_ ასოციაციურობა;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{R}\cap\left(\tilde{S}\cup\tilde{T}\right)=\left(\tilde{R}\cap\tilde{S}\right)\cup\left(\tilde{R}\cap\tilde{T}\right)\\ \tilde{R}\cup\left(\tilde{S}\cap\tilde{T}\right)=\left(\tilde{R}\cup\tilde{S}\right)\cap\left(\tilde{R}\cup\tilde{T}\right)\end{array}\right\}\text{ \_ დისტრიბუციურობა;}$$

$\tilde{R}\cap\left(\tilde{S}\cup\tilde{R}\right)=\tilde{R}\ ,\ \ \tilde{R}\cup\left(\tilde{S}\cap\tilde{R}\right)=\tilde{R}$ – შთანთქმა;

განსაზღვრება 2-ის შემთხვევაში:

$$\tilde{R}\cap\left(\tilde{S}\cup\tilde{R}\right)\subseteq\tilde{R}\ ,\quad \tilde{R}\cup\left(\tilde{S}\cap\tilde{R}\right)\supseteq\tilde{R}\ .$$

მნიშვნელოვანი თვისება $\tilde{S}\subseteq\tilde{T}\Rightarrow\tilde{R}\cup\tilde{S}\subseteq\tilde{R}\cup\tilde{T},\ \ \tilde{R}\cap\tilde{S}\subseteq\tilde{R}\cap\tilde{T}$.

ცარიელი მიმართება: $\varnothing(x,y)=0,\ \ \forall(x,y)\in X\times X.$

სრული მიმართება: $U(x,y)=1,\ \ \forall(x,y)\in X\times X.$

აღნიშნული მიმართებები აკმაყოფილებენ შემდეგ იგივეობებს:

$$\tilde{R}\cap\varnothing=\varnothing,\ \ \tilde{R}\cup\varnothing=\tilde{R}\ ;\qquad \tilde{R}\cap U=R,\ \ \tilde{R}\cup U=U.$$

გამოყენებით ამოცანებში დიდი მნიშვნელობა აქვს *ფაზი მიმართებების კომპოზიციას* (ზოგჯერ მას გამრავლებას უწოდებენ). ჩვეულებრივი მიმართებებისგან განსხვავებით, ფაზი მიმართებათა კომპოზიცია შეიძლება მოცემული იქნას სხვადასხვა ხერხებით.

განსაზღვრება 1.2.4.12: $\tilde{R}_1$ და $\tilde{R}_2$ *ფაზი მიმართებათა* $(\max-\min)$ *-კომპოზიცია (მაქსმინური კომპოზიცია)* $\tilde{R}_1\circ\tilde{R}_2$ განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\mu_{\tilde{R}_1\circ\tilde{R}_2}(x,z)=\sup_{y\in X}\min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y),\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right\},\ \forall\ (x,\ z)\in X^2.$$

თუ, უნივერსუმი X სასრულია, მაშინ ფაზი მიმართება $\tilde{R}_1\circ\tilde{R}_2$-ის მატრიცა წარმოადგენს $\tilde{R}_1$ და $\tilde{R}_2$ მიმართებათა მატრიცების მაქსიმინურ ნამრავლს ანუ მიიღება იგივე ოპერაციების გამოყენებით როგორც ჩვეულებრივი მიმართებების ნამრავლის მატრიცა.

განსაზღვრება 1.2.4.13: $\tilde{R}_1$ და $\tilde{R}_2$ *ფაზი მიმართებათა* $(\max-\times)$ *კომპოზიცია (მაქსმულტიპლიკატიური ნამრავლი)* $\tilde{R}_1\circ\tilde{R}_2$ განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\mu_{\tilde{R}_1\circ\tilde{R}_2}(x,z)=\sup_{y\in X}\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y)\times\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right\},\ \forall\ (x,\ z)\in X^2.$$

განსაზღვრება 1.2.4.14: $\tilde{R}_1$ და $\tilde{R}_2$ *ფაზი მიმართებათა* $(\min-\max)$ *-კომპოზიცია (მინმაქსური ნამრავლი)* $\tilde{R}_1\circ\tilde{R}_2$ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\mu_{\tilde{R}_1\circ\tilde{R}_2}(x,z)=\inf_{y\in X}\max\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y),\mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right\},\ \forall\ (x,\ z)\in X^2.$$

ფაზი მიმართებათა თვისებები:

• X^2 დეკარტულ ნამრავლზე $\tilde{R}$ ფაზი მიმართებას ეწოდება *რეფლექსური,* თუ $\mu_{\tilde{R}}(x,x)=1,\ \forall\, x\in X$.

სასრული X სიმრავლისათვის რეფლექსური ფაზი მიმართების მატრიცის მთავარი დიაგონალი შეიცავს მხოლოდ ერთიანებს.

რეფლექსური ფაზი მიმართების მაგალითად შეიძლება გამოდგეს მიმართება "მიახლოებით ტოლი" ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე.

• X^2 დეკარტულ ნამრავლზე $\tilde{R}$ ფაზი მიმართებას ეწოდება *ანტირეფლექსური,* თუ $\mu_{\tilde{R}}(x,x)=0,\ \forall\, x\in X$..

სასრული X სიმრავლის შემთხვევაში ანტირეფლექსური მიმართების მატრიცის მთავარი დიაგონალი შეიცავს მხოლოდ ნულებს.

მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ ფაზი მიმართება "ზევრად მეტია".

ნათელია, რომ რეფლექსური მიმართების დამატება ანტირეფლექსურია.

• X^2 დეკარტულ ნამრავლზე $\tilde{R}$ ფაზი მიმართებას ეწოდება *სიმეტრიული,* თუ $\mu_{\tilde{R}}(x,y)=\mu_{\tilde{R}}(y,x),\ \forall\,(x,y)\in X^2$.

თუ X სასრული სიმრავლეა, სიმეტრიული ფაზი მიმართების მატრიცა სიმეტრიულია, ანუ $r_{ij}=r_{ji}$. ამ მიმართების შესაბამისი გრაფი არაა ორიენტირებული სიმეტრიული ფაზი მიმართების.

• X^2 დეკარტულ ნამრავლზე $\tilde{R}$ ფაზი მიმართებას ეწოდება *ანტისიმეტრიული,* თუ მისი მიკუთვნების ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისება:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y)>0\ \Rightarrow\ \mu_{\tilde{R}}(y,x)=0,\ \forall\,(x,y)\in X^2\,|\,x\neq y.$$

ეს თვისება შეიძლება ავღწეროთ შემდეგი ორი ექვივალენტური ტოლობის სახით:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y)\times\mu_{\tilde{R}}(y,x)=0,\ \forall\,(x,y)\in X^2\,|\,x\neq y;$$

$$\min\{\mu_{\tilde{R}}(x,y),\mu_{\tilde{R}}(y,x)\}=0,\ \forall\,(x,y)\in X^2\,|\,x\neq y.$$

შენიშვნა: ყველა არარეფლექსური (არასიმეტრიული) მიმართება არაა ანტირეფლექსური (ანტისიმეტრიული).

- X^2 დეკარტულ ნამრავლზე $\tilde{R}$ ფაზი მიმართებას ეწოდება *ტრანზიტიული,* თუ $\tilde{R} \circ \tilde{R} \subseteq \tilde{R}$.

განმარტებიდან ჩანს, რომ ტრანზიტიულობა პირდაპირ დამოკიდებულია კომპოზიციის სახეობაზე.

შენიშვნა: თუ ფაზი მიმართებას გააჩნია მაქსმინური ტრანზიტიულობა, მას გააჩნია აგრეთვე მაქსმულტიპლიკატიური ტრანზიტიულობაც, ხოლო მაქსმულტიპლიკატიური ტრანზიტულობის მქონე ფაზი მიმართებას, ზოგადად, შეიძლება არ გააჩნდეს ორი სხვა აზრის ტრანზიტიულობა.

$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ კომპოზიცია	ტრანზიტიულობის სახე
მაქსმინური	$\sup\limits_{y\in X}\min\{\mu_{\tilde{R}}(x,y),\mu_{\tilde{R}}(y,z)\}\geq \mu_{\tilde{R}}(x,z),\ \forall\ (x,\ z)\in X^2.$
მაქსმულტიპლიკატიური	$\sup\limits_{y\in X}\{\mu_{\tilde{R}}(x,y)\times\mu_{\tilde{R}}\ (y,z)\}\leq \mu_{\tilde{R}}(x,z),\ \forall\ (x,\ z)\in X^2.$
მინმაქსური	$\inf\limits_{y\in X}\max\{\mu_{\tilde{R}}(x,y),\mu_{\tilde{R}}\ (y,z)\}\leq \mu_{\tilde{R}}(x,z),\ \forall\ (x,\ z)\in X^2.$

ცხრილი 1.2.4.1. ტრანზიტიულობის განმარტებები სხვადასხვა კომპოზიციების პირობებში.

განსაზღვრება 1.2.4.15 (ტრანზიტიული ჩაკეტვა): X^2 დეკარტულ ნამრავლში $\tilde{R}$ ფაზი მიმართების ტრანზიტული ჩაკეტვა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\hat{\tilde{R}} = \tilde{R} \cup \tilde{R}^2 \cup \ldots \cup \tilde{R}^n \ldots, \tilde{R}^n = \tilde{R}^{n-1} \circ \tilde{R} = \tilde{R} \circ \tilde{R}^{n-1},\ n = 2.$$

ტრანზიტიული ჩაკეტვის შემოღებისას აუცილებელია მიუთითოთ თუ რა სახის კომპოზიციას ვიყენებთ.

თეორემა 1.2.4.1: ნებისმიერი ფაზი მიმართების ტრანზიტიული ჩაკეტვა არის ტრანზიტიული ფაზი მიმართება.

მნიშვნელოვანი თვისება: თუ ფაზი მიმართება $\tilde{R}$ ტრანზიტიულია, მაშინ ის ემთხვევა თავის ტრანზიტიულ ჩაკეტვას.

თეორემა 1.2.4.2 (ფაზი მიმართებათა დეკომპოზიციის თეორემა): ნებისმიერი $\tilde{R}$ ფაზი მიმართება შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი ფორმით: $\tilde{R} = \bigcup_{\alpha\in]0,1]} \alpha R_\alpha$, სადაც

$$\mu_{R_\alpha}(x,y) = \begin{cases} 1, if \ \mu_{\tilde{R}}(x,y) \geq \alpha \\ 0, \mu_{\tilde{R}}(x,y) < \alpha \end{cases}.$$

აქ ჩანაწერი αR_α ნიშნავს, რომ R_α ჩვეულებრივი მიმართების ყველა ელემენტი მრავლდება α-ზე.

განვიხილოთ $\tilde{R}$ ფაზი მიმართება x^2 დეკარტულ ნამრავლში, სადაც x-ს გააჩნია სიმძლავრე n, ანუ $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ მაშინ მისი ტრანზიტული ჩაკეტვა განისაზღვრება შემდეგნაირად $\hat{\tilde{R}} = \bigcup_{k=1}^{n} R^k$.

შენიშვნა: თუ რომელიმე $\tilde{R}^t = \tilde{R}^{t+1}$, $t < n-1$, ახარისხების პროცესი შეიძლება შეჩერდეს.

თეორემა 1.2.4.3: თუ ფაზი მიმართება $\tilde{R}$ ტრანზიტული და რეფლექსურია, მაშინ $\tilde{R}^k = \tilde{R},\ k = 1,2,3,...$

თვისება 1.2.4.1: თუ სიმრავლე $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ და $\tilde{R}$ ფაზი მიმართება რეფლექსურია, მაშინ მისი ტრანზიტული ჩაკეტვა შემდეგნაირია $\hat{\tilde{R}} = \tilde{R}^{n-1}$.

თვისება 1.2.4.2: $\tilde{R}$ ფაზი მიმართების ტრანზიტული ჩაკეტვის α დონე ემთხვევა შესაბამისი α დონის ტრანზიტულ ჩაკეტვას $\left(\hat{\tilde{R}}\right)_\alpha = \hat{\tilde{R}}_\alpha,\ \forall \alpha \in]0,1]$.

უნდა აღინიშნოს, რომ ფაზი მიმართების ტრანზიტული ჩაკეტვა მხოლოდ ზოგიერთ თვისებას ინარჩუნებს. ეს თვისებებია: რეფლექსურობა, სიმეტრიულობა, ტრანზიტულობა, სისრულე.

$\tilde{R}$ ფაზი მიმართებას ეწოდება **სრული,** თუ $\tilde{R} \cup \tilde{R}^{-1} = U$ ანუ

$$\max\left\{\mu_{\tilde{R}}(x,y),\mu_{\tilde{R}}(y,x)\right\}=1,\ \ \forall(x,y)\in X^2.$$

აქ $\tilde{R}$-ის სიმეტრიული მიმართების აღნიშვნაა $\tilde{R}^{-1}$.

1.2.5. ფაზი რიცხვები

ფაზი-რიცხვები (FN- Fuzzy Numbers) შესწავლილია მრავალი ცნობილი ავტორის მიერ (Dubois, 1978; 1983; Kaufmann, 1988).

განსაზღვრება 1.2.5.1. ნამდვილ რიცხვთა ℝ სიმრავლეზე განსაზღვრულ ამოზნექილ და ნორმირებულ ფაზი სიმრავლეს, რომლის მიკუთვნების ფუნქცია უწყვეტია ეწოდება ფაზი რიცხვი (Fuzzy Number - FN). მაშასადამე, ფაზი რიცხვი არის ფაზი სიმრავლე, რომელიც სხვადასხვა მიკუთვნების ხარისხით შეიცავს ნამდვილ რიცხვებს გარკვეული ინტერვალიდან.

$\tilde{c}(t):R^1\to[0;1]$-ს ეწოდება ფაზი-რიცხვი:

$$\tilde{c}(t)=\begin{cases}1 & if\ \ t\in[c_2';c_2''] \\ \dfrac{t-c_1}{c_2'-c_1} & if\ \ t\in[c_1,c_2'] \\ \dfrac{c_3-t}{c_3-c_2''} & if\ \ t\in[c_2'',c_3] \\ 0 & otherwise\end{cases},$$

სადაც $c_1\le c_2'\le c_2''\le c_3\in R^1$ ($\tilde{c}\equiv(c_1,c_2',c_2'',c_3)$). ფაზი რიცხვი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ინერვალური რიცხვის განზოგადება.

ლიტერატურაში ხშირად გვხვდება ე.წ. სამკუთხა ფაზი რიცხვები (TFN-Triangular Fuzzy Number) და განვიხილოთ არითმეტიკული ოპერაციები მათზე ($c_2'=c_2''$).

დავუშვათ $\tilde{c}$ და $\tilde{b}$ წარმოადგენს სამკუთხა ფაზი–რიცხვებს, სადაც $\tilde{c}=(c_1,c_2,c_3)$ და $\tilde{b}=(b_1,b_2,b_3)$. მაშინ,

1: $\tilde{c}+\tilde{b}=(c_1+b_1,c_2+b_2,c_3+b_3)$;

2: $\tilde{c}-\tilde{b}=(c_1-b_3,c_2-b_2,c_3-b_1)$;

3: $\tilde{c}\times k=(kc_1,\ kc_2,kc_3),\ \ k>0$;

4: $\tilde{c}^k = \left(c_1^k, c_2^k, c_3^k\right), \; k > 0, c_i > 0$

5: $\tilde{c} \cdot \tilde{b} = \left(c_1 b_1, c_2 b_2, c_3 b_3\right), c_i > 0, b_i > 0$

6: $1/\tilde{b} = \{1/b_3, 1/b_2, 1/b_1\}, \; b_i > 0$;

7: $\tilde{c} > \tilde{b}$ თუ $c_2 > b_2$ და თუ $c_2 = b_2$ მაშინ $\tilde{c} > \tilde{b}$;

თუ $c_1 + c_3 > b_1 + b_3$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\tilde{c} = \tilde{b}$.

8. თუ $\tilde{c} = \left(c_1, c_2, c_3\right)$ ფაზი-სამკუთხა რიცხვია, მაშინ $\tilde{c}$-ს მოსალოდნელი მნიშვნელობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით: $E(\tilde{c}) = c_2 + (c_3 - 2c_2 + c_1)/4$. ვიტყვით რომ, $\tilde{a} > \tilde{b}$ თუ $a_2 > b_2$ და თუ $a_2 = b_2$ მაშინ $\tilde{a} > \tilde{b}$;

თუ $\dfrac{a_1 + a_3}{2} > \dfrac{b_1 + b_3}{2}$ წინააღმდეგ შემთხვევაში $\tilde{a} = \tilde{b}$.

განსაზღვრება 1.2.5.2. ტრაპეციოდალური ფაზი რიცხვი $\tilde{A}$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი ოთხეულის სახით $\tilde{A} = (a, b, c, d)$. მისი მიკუთვნების ფუნქცია განისაზღვრება როგორც,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & if \;\; x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & if \;\; a \le x \le b, \\ 1, & if \;\; b \le x \le c, \\ \dfrac{d-x}{d-c} & if \;\; c \le x \le d, \\ 0 & if \;\; x > d, \end{cases}$$

სადაც $a \le b \le c \le d$.

1.2.6. ფაზი ლოგიკა

კლასიკური ორმნიშვნელობიანი (ჭეშმარიტი ან მცდარი) ლოგიკა შეიძლება გაფართოვდეს სამნიშვნელობიან ლოგიკამდე, სადაც ჭეშმარიტობის, მცდარობის და განუზღვრელობის აღსანიშნავად გამოიყენება შესაბამისად 1, 0 და $\frac{1}{2}$. უარყოფის ოპერატორი $\bar{a} = 1 - a$. ამიტომ $\bar{1} = 0; \; \bar{0} = 1; \; \overline{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$ სხვა ოპერატორები, როგორიცაა $\wedge, \; \vee, \; \Rightarrow, \; \Leftrightarrow$ განსხვავდებიან სხვადასხვა ლოგიკაში. აღნიშნული ოთხი

ოპერატორისთვის ცხრილი 1.2.6.1-ში მოცემულია ხუთი ყველაზე ცნობილი სამმნიშვნელობიანი ლოგიკა ავტორთა დასახელებით (Klir & Folger, 1988).

		Lukasiewicz				Bochvar				Kleene				Heyting				Reichenbach			
a	b	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ცხრილი 1.2.6.1. სამმნიშვნელობიანი ლოგიკა სხვადასხვა ავტორების მიხედვით.

ცხრილიდან კარგად ჩანს, რომ არცერთი ამ ლოგიკიდან არ აკმაყოფილებს წინააღმდეგობრიობის კანონს ($a \wedge \bar{a} = 0$), გამორიცხული მესამის კანონს ($a \vee \bar{a} = 1$) და ზოგიერთ იმ თვისებებს, რომლებიც კლასიკურ ლოგიკაში სრულდება.

მაგალითად, ბოჩვარის (Klir & Folger, 1988) სამნიშვნელობიანი ლოგიკაში ცხადად ჩანს, რომ არ აკმაყოფილებს ორმნიშვნელობიანი (კლასიკური) ლოგიკის არცერთ ტავტოლოგიას, რადგან მისი პრიმიტივებიდან თითოეული წარმოადგენს შეფასებას $\frac{1}{2}$, როცა a და b-დან რომელიმე ღებულობს ამ მნიშვნელობას, ამიტომ განიხილავენ ჩვეულებრივი გაგებით ტავტოლოგიის გაფართოებას ფართო გაგებით კვაზიტავტოლოგიამდე.

ჩვენ ვამბობთ, რომ სამგანზომილებიან ლოგიკაში ლოგიკური ფორმულა, რომელიც არ ღებულობს ჭეშმარიტობის შეფასებას 0 (მცდარობა), დამოუკიდებელია მის პროპოზიციულ ცვლადებზე დანიშნული ჭეშმარიტობის შეფასებისგან წარმოადგენს კვაზიტავტოლოგიას. ანალოგიურად ვიძახით, რომ ლოგიკური

ფორმულა, რომელიც არ ღებულობს შეჭმარიტობის შეფასებას 1 (ჭეშმარიტობა) წარმოადგენს კვაზი-კონტრადიქციას (Klir & Folger, 1988).

სამგანზომილებიანი ლოგიკა მიღებული იყო როგორც მნიშვნელოვანი და სასარგებლო, მაგრამ გაჩნდა იდეა გამოეკვლიათ n–მნიშვნელობიანი ლოგიკა ჭეშმარიტობის შეფასების ნებისმიერი $n \geq 2$ რიცხვისათვის. რამოდენიმე n–განზომილებიანმა ლოგიკამ განვითარება ჰპოვა 1930 წელს. ნებისმიერი მოცემული n რიცხვისათვის ჭეშმარიტობის შეფასებები აღნიშნულ ლოგიკებში ჩვეულებრივ იღებენ რაციონალური რიცხვით მნიშვნელობებს $[0, 1]$ ინტერვალიდან. ეს შეფასებები მიიღება 0–სა და 1–შორის ინტერვალის თანაბრად დაყოფით. ამრიგად, n–მნიშვნელობიანი ლოგიკის ჭეშმარიტობის შეფასებების T_n სიმრავლე განისაზღვრება როგორც $T_n = \left\{ 0 = \frac{0}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, ..., \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1 \right\}$.

ეს სიდიდეები შეიძლება იყოს მიღებული როგორც ჭეშმარიტობის ხარისხები.

პირველი სერია n–მნიშვნელობიანი ლოგიკისა, რომლისთვისაც $n \geq 2$ შემოთავაზებული იყო 1930 წლის დასაწყისში უკასივიქცის მიერ, როგორც მისი სამნიშვნელობიანი ლოგიკის განზოგადება. იგი იყენებს T_n–ში ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებს და პრიმიტივებს განსაზღვრავს შემდეგი ტოლობებით:

$$\begin{aligned}
\bar{a}. &= 1 - a, \\
a \wedge b &= \min(a, b), \\
a \vee b &= \max(a, b), \qquad (1.2.6.1) \\
a \Rightarrow b &= \min(1, 1 + b - a), \\
a \Leftrightarrow b &= 1 - |a - b|.
\end{aligned}$$

უკასივიქცმა ფაქტობრივად გამოიყენა მხოლოდ უარყოფა და იმპლიკაცია (გამომდინარეობა), როგორც პრიმიტივები და სხვა ლოგიკური ოპერაციები განსაზღვრა ამ ორი პრიმიტივით შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
a \vee b &= (a \Rightarrow b) \Rightarrow b, \\
a \wedge b &= \overline{\bar{a} \vee \bar{b}}, \\
a \Leftrightarrow b &= (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a).
\end{aligned}$$

თითოეული $n \geq 2$-თვის, უკასივიქცის n–მნიშვნელობიანი ლოგიკა ლიტერატურაში ჩვეულებრივ აღინიშნება L_n–ით. ჭეშმარიტობის შეფასებები

აღებულია T_n –დან და მისი პრიმიტივები განსაზღვრულია (1.2.6.1) ფორმულებით. ასეთი $(L_2, L_3, ..., L_\infty)$ ლოგიკების მიმდევრობა შეიცავს ორ კერძო შემთხვევას – L_2 და L_∞ ლოგიკებს. L_2 წარმოადგენს კლასიკურ ორმნიშვნელობიან ლოგიკას, ხოლო L_∞ – უსასრულო–მნიშვნელობიან ლოგიკას, რომლის ჭეშმარიტობის ხარისხები აიღება ყველა რაციონალური რიცხვების T_∞ სიმრავლიდან $[0,1]$ ინტერვალში.

1.3. ფაზი განუზღვრელობა და მათი ზომები

1.3.1. დემპსტერ-შეიფერის ნდობის სტრუქტურა

მონაცემთა ტანის თეორია (Evidence Theory) დაფუძნებულია ორ ფაზი (მონოტონურ) ზომაზე: *ნდობის ზომაზე (Belief Measures)* და *დასაჯერობის ზომაზე (Plausibility Measures),* რომლებიც განუზღვრელი ინფორმაციის ცალკეული ნაწილების ერთად კომბინირებისათვის ხდომილების ალბათობის გამოსათვლელად გამოიყენება.

ვთქვათ, მოცეული გვაქვს სასრული X უნივერსალური სიმრავლე, $P(X)$ -ით აღვნიშნოთ მისი ყველა შესაძლო ქვესიმრავლე ცარიელი სიმრავლის ჩათვლით. მაშინ მისი ნდობის ზომა განისაზღვრება ფუნქციით:

$Bel : P(X) \to [0,1]$.

აქედან გამომდინარე X –ის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლისათვის გვექნება: $Bel(\emptyset) = 0,\ Bel(X) = 1$, და

$$
\begin{aligned}
Bel(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \geq & \sum_j Bel(A_j) \\
& - \sum_{j<k} Bel(A_j \cap A_k) \\
& + \sum_{j<k<l} Bel(A_j \cap A_k \cap A_l) \\
& . \\
& . \\
& . \\
& + (-1)^{n+1} Bel(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \qquad (1.3.1.1)
\end{aligned}
$$

ნდობის ზომის ეს თვისება ნიშნავს, რომ ის არის სუპერადიციური შემდეგი გაგებით: $Bel(A \cup B) \geq Bel(A) + Bel(B)$, $A, B \in P(X)$ სიმრავლის ყველა

ქვესიმრავლისთვის. როცა, X არის უსასრულო, ფუნქცია Bel ასევე მოითხოვს რომ იყოს შემოუსაზღვრავი ზემოდან.

დასაჯერობის ზომა არის ფუნქცია: $Pl : P(X) \to [0,1]$, აქედან გამომდინარე X –ის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლისთვის სამართლიანია:

$Pl(\emptyset) = 0, \ Pl(X) = 1$ და

$$Pl(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_j Pl(A_j) - \sum_{j<k} Pl(A_j \cup A_k) + \sum_{j<k<l} Pl(A_j \cup A_k \cup A_l) \ . \ . \ . + (-1)^{n+1} Pl(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \ . \quad (1.3.1.2)$$

დასაჯერობის ზომის ეს თვისება ნიშნავს, რომ ის არის სუბადიციური შემდეგი გაგებით: $Pl(A \cup B) \leq Pl(A) + Pl(B)$, $A, B \in P(X)$ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლისთვის. როცა, X არის უსასრულო, ფუნქცია Pl ასევე მოითხოვს რომ იყოს შემოუსაზღვრავი ქვემოდან.

კარგად არის ცნობილი, რომ ნებისმიერი ამ ორი ზომიდან არის ცალსახად განსაზღვრული შემდეგი ტოლობით: $Pl(A) = 1 - Bel(\overline{A})$, ყველა $A \in P(X)$ –თვის, სადაც $\overline{A}$ არის A –ს დამატება. ასევე კარგად არის ცნობილი, რომ

$$Pl(A) \geq Bel(A), \quad (1.3.1.3)$$

ნებისმიერი $A \in P(X)$ –თვის.

მონაცემთა ტანის თეორია, რომელიც განუზღვრელობის განაწილების მნიშვნელოვანი ინსტრუმენტია, კარგად არის განმარტებული შეიფერისა და დემპსტერის მიერ. რის გამოც თეორია ხშირად იწოდება როგორც *დემპსტერ–შეიფერის თეორია.*

ნდობის და დასაჯერობის ზომა შეიძლება აღიწეროს შემდეგი მახასიათებელი ფუნქციით, რომელსაც *ფოკალურ ალბათობას* უწოდებენ.

$$m : P(X) \to [0,1] \quad (1.3.1.4)$$

იგი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ ორ პირობას:

(I) $m(\emptyset)=0$

(II) $\sum_{A\in P(X)} m(A)=1,$

ამ ფუნქციას ასევე ეწოდება *საბაზო ალბათური განაწილება (Basic Probability Assignment).* თითოეული $A\in P(X)$ სიმრავლისთვის $m(A)$ – ელემენტის წონაა, იგი ასახავს ფარდობას ყველა არსებულ და რელევანტურ ხდომილებას შორის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას, რომ განსაზღვრული X ელემენტი მიეკუთვნება მხოლოდ და მხოლოდ A-ს და არ მიეკუთვნება არცერთ მის ქვესიმრავლეს. აქედან გამომდინარე შეიძლება განისაზღვროს შესაძლებლობითი ინტერვალების ზედა და ქვედა საზღვრები. ეს ინტერვალები შეიცავენ განსახილველი ქვესიმრავლის ზუსტ ალბათობებს (კლასიკური თვალსაზრისით), და შემოსაზღვრულია ორი არაადიტირებული უწყვეტი ზომით, რომელსაც ეწოდება *ნდობა (Belief)* და *დასაჯერობა (Plausibility)* (Klir & Wierman, 1998):

$$Bel(A)\le P(A)\le Pl(A)$$

$Bel(A)$ ნდობის ზომა A სიმრავლის მიმართ განისაზღვრება როგორც ყველა მისი განსახილველი ქვესიმრავლის ჯამი:

$$Bel(A)=\sum_{B|B\subseteq A} m(B)$$

ხოლო, დასაჯერობის ზომა $Pl(A)$ – ეს არის წონების ჯამი ყველა იმ B სიმრავლისა, რომლებიც გადაკვეთენ განსახილველ A სიმრავლეს:

$$Pl(A)=\sum_{B|B\cap A\neq 0} m(B)$$

თუ $A\subset X$ ისეთი ქვესიმრავლეა, რომ $m(A)>0$, მაშინ მას *ეტალონი* ეწოდება. ყველა ასეთი *ეტალონთა სიმრავლე* აღვნიშნოთ $\Im$ –ით, $<\Im, m>$ – *წყვილს ეწოდება მონაცემთა ტანი.*

დემპსტერ–შეიფერის ტემპორალიზებული ნდობის სტრუქტურის აღწერა. განვიხილოთ ისეთი საინფორმაციო ნაკადების ანალიზი, რომელიც საექსპერტო ცოდნის დაზუსტების მოდელირებას ახდენს გადაწყვეტილების მიღების ზოგად სისტემებში. გადაწყვეტილების მიღების სისტემა, რომელიც გააერთიანებს

გადაწყვეტილების მიღების ცოდნის ტექნოლოგიებსა და მეთოდებს, განვიხილავთ როგორც კორტეჟს:

$$(\Omega, D, U, I, K, T, \subset) \qquad (1.3.1.5)$$

სადაც $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ – სისტემის მდგომარეობათა (მოქმედებების, აქტივობების, ფაქტორთა, სიმპტომთა და ა.შ) სიმრავლეა;

$D = \{d_1, d_2, ..., d_m\}$ – გადაწყვეტილების მიმღები პირის (DM-ის) მიერ მისაღები შესაძლო გადაწყვეტილებების (ალტერნატივების, დიაგნოზების და სხვა) სიმრავლეა;

T – დროის სტრუქტურაა, რომელიც ასახავს სისტემის მდგომარეობებსა და შესაძლო გადაწყვეტილებებზე გადაწყვეტილების მიმღები პირის უპირატესობათა, აქტივობებისა და შეფასებების, როგორც ინფორმაციის დაზუსტების ევოლუციის ინდექსს. დასაშვებია $T = \{0, 1, ..., N\}$ თუ $N = 0$ გვაქვს სტატიკური გარემო; თუ $N \geq 1$ ან $T = Z_0^+$ – მაშინ ტემპორალიზებული გარემო;

I - ინფორმაციაა სისტემის მდგომარეობათა განუზღვრელობაზე დემპსტერ–შეიფერის ნდობის სტრუქტურის სახით.

$U = \langle U_1, U_{2,} ..., U_p \rangle, \quad U_k \in \Omega \times D \times T, \quad k = 1, ..., p$ – მკაფიო ან ფაზი მიმართებათა ვექტორია, რომელიც წარმოადგენს DM–ს უპირატესობათა საექსპერტო შეფასებების ტემპორალურ ნაკადს სისტემის მდგომარეობებზე შესაძლო გადაწყვეტილებებთან, ალტერნატივებთან მიმართებაში.

$\mathrm{K} = \{k_1, k_2, ..., k_q\}$, $k_i : U = (U_1, U_2, ..., U_q), \quad i = 1, ..., q$ - DM–ის უპირატესობათა შეფასებებზე განმარტებული ანალიზური თუ ლოგიკური ოპერატორია, რომელიც ქმნის გადაწყვეტილების მიღების მრავალკრიტერიუმიან მოდელს.

მონაცემთა ტანის ევოლუციის სტრუქტურა ანუ *დემპსტერ–შეიფერის ტემპორალიზებული ნდობის სტრუქტურა*, რომელიც სისტემის მდგომარეობებზე დაზუსტებული ინფორმაციის (ცოდნის) საექსპერტო შეფასებათა ტემპორალიზებულ ნაკადს ქმნის, ასე წარმოიდგინება:

$$\langle \Im_0, m_0 \rangle \subset \langle \Im_1, m_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle \Im_N, m_N \rangle \subset \cdots \qquad (1.3.1.6)$$

სადაც $\langle \Im_{t,} m_t \rangle$, $(t = 0, 1 ...)$, t–ური დაზუსტებული ინფორმაციის შესაბამისი მონაცემთა ტანია. მაგალითისთვის მონაცემთა დაზუსტების (ჩართვის) $\subset$ მიმართება

განმარტებულია (1.3.1.6) ტიპის ინფორმაციულ ნაკადში. იგი წარმოადგენს წინა $(t-1)$ ნდობის სტრუქტურის დაზუსტებას. რაც უზრუნველყოფს მონაცემთა ტანის საბაზო ალბათური განაწილების შეიფლის ენტროპიის (Sirbiladze & Khachidze, 2003) შემცირებას.

$$H_{shapley}(m_t) \geq H_{Shapley}(m_{t+1}), \quad t \in T \qquad (1.3.1.7)$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი საექსპერტო ცოდნის მეთოდისთვის ჩართვის $\subset$ მიმართება განმარტებული იქნება ინდივიდუალურად. იგი იქნება ან ფორმულა ან ალგორითმი ან პირიქით დაპროგრამების ამოცანის ამონახსნი და ა.შ., რომელიც უზრუნველყოფს საინფორმაციო ზომების, ენტროპიის, არასპეციფიურობის და ა.შ. შემცირებას.

1.3.2. შესაძლებლობისა და აუცილებლობის ზომები

სანდოობის (Bel) და დასაჯერობის (Pl) ზომებს კონსონანტური ეწოდება იმ შემთხვევაში, თუ $<\Im, m>$ ტანში ჩალაგებულია ფოკალური ელემენტები. ასეთ შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი (Klir & Folger, 1988):

$$Bel(A \cap B) = \min[Bel(A), Bel(B)], \ \forall A, B \in \mathrm{P}(X);$$
$$Pl(A \cup B) = \max[Pl(A), Pl(B)], \ \forall A, B \in \mathrm{P}(X);$$

განსაზღვრება 1.3.2.1. კონსონანტურ სანდოობის და დასაჯერობის ზომებს ეწოდება აუცილებლობის (Necessity) და შესაძლებლობის (Possibility) ზომები. აუცილებლობის ზომა აღინიშნება ν სიმბოლოთი, ხოლო შესაძლებლობის ზომა - π სიმბოლოთი, მაშინ $\forall A, B \in \mathrm{P}(X)$ –თვის სამართლიანია:

$$\nu(A \cap B) = \min[\nu(A), \nu(B)];$$
$$\pi(A \cup B) = \max[\pi(A), \pi(B)];$$

ნათელია, რომ $\nu(A) = 1 - \pi(\overline{A}), \forall A \in \mathrm{P}(X).$

1.4. გადაწყვეტილების მიღების აგრეგირების ოპერატორები

1.4.1. აგრეგირების ოპერატორის განსაზღვრება და თვისებები

აგრეგირების ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ იგი აკავშირებს ობიექტების აგრეგირების n ცალ კორტეჟს, რომელიც შედის მოცემულ სიმრავლეში ამავე სიმრავლის ერთადერთ ობიექტთან. მათემატიკური აგრეგირების ოპერატორის

შემთხვევაში ეს სიმრავლე შედგება ნამდვილი რიცხვებისგან. ამ მხრივ, *აგრეგირების ოპერატორი* არის ფუნქცია, რომელიც ნამდვილი რიცხვების ნებისმიერი *n*-კორტეჟისთვის $(x_1, x_2,..., x_n)$ ღებულობს y ნამდვილ მნიშვნელობას:

$$y = Aggreg(x_1, x_2,..., x_n). \qquad (1.4.1.1)$$

ბუნებრივია, *Aggreg* ფუნქციაზე უნდა განისაზღვროს პირობები, რათა გამართლდეს სახელწოდება „აგრეგირების ოპერატორი“ (Mayor & Trillas, 1986; Yager & Kacprzyk, 1997; Zadeh, 1993).

ამრიგად, ჩვენ განვმარტავთ აგრეგირების ოპერატორს, როგორც ფუნქციას $Aggreg: \bigcup_{n \in N} [0,1]^n \to [0,1]$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- $Aggreg(0, 0,...., 0) = 0$ და $Aggreg(1,1,....,1) = 1$
- $Aggreg(x_1, x_2,...., x_n) \le Aggreg(y_1, y_2,...., y_n)$ თუ $(x_1, x_2,...., x_n) \le (y_1, y_2,...., y_n)$

  (იდენტიფიცირება, როდესაც ერთადგილიანი სასაზღვრო პორობები არ მცირდება).

აგრეგირების ოპერატორების თვისებები პირობითად შეგვიძლია დავყოთ ორ ჯგუფად: *მათემატიკური თვისებები (The Mathematical Properties)* და *ქცევითი თვისებები (The Behavioral Properties)* (Fodor & Roubens, 1994; Grabisch, Nguyen & Walker, 1995).

მათემატიკური თვისებები:

- *სასაზღვრო პირობები (Boundary Conditions)*

აქ ჩვენ ვაქცევთ ყურადღებას აგრეგირების ოპერატორის ქცევას საუკეთესო და უარეს შემთხვევაში. ჩვენ ველით, რომ აგრეგირების ოპერატორი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Aggreg(0, 0,...., 0) = 0 \qquad (1.4.1.2)$$

$$Aggreg(1,1,....,1) = 1 \qquad (1.4.1.3)$$

(1.4.1.2) პირობა ნიშნავს, რომ თუ ჩვენ ვაკვირდებით მხოლოდ ცუდ, მცდარ ან არა დამაკმაყოფილებელ კრიტერიუმებს, მაშინ საერთო აგრეგაცია უნდა იყოს ასევე მთლიანად ცუდი, მცდარი ან არა დამაკმაყოფილებელი. შესაბამისად, (1.4.1.3) პირობა ნიშნავს, რომ თუ ჩვენ ვაკვირდებით მხოლოდ ჭეშმარიტ ან სრულიად

დამაკმაყოფილებელ კრიტერიუმებს, მაშინ საერთო აგრეგაცია უნდა იყოს ასევე ჭეშმარიტი და სრულიად დამაკმაყოფილებელი.

ზოგიერთი ავტორი აღნიშნავს, რომ აგრეგირების ოპერატორების განმარტების ეს თვისებები ფუნდამენტური თვისებებია (Yager & Kacprzyk, 1997), ხოლო ზოგიერთი გვთავაზობს ფუნდამენტური თვისებების შემდეგ გაფართოებულ ვარიანტს (Aczel, 1966):

$$\forall x \in [0,1] \quad Aggreg(x,0) = Aggreg(1,0) \cdot x \qquad (1.4.1.4)$$

$$\forall x \in [0,1] \quad Aggreg(x,1) = (1 - Aggreg(1,0)) \cdot x + Aggreg(1,0) \qquad (1.4.1.5)$$

უნდა ავღნიშნოთ, რომ (1.4.1.4)-ში მოითხოვება, რომ $Aggreg(x,0)$ სიდიდე იყოს x–ის და 0–ის შეწონილი არითმეტიკული საშუალო. შესაბამისად, (1.4.1.5)–ში $Aggreg(1,0)$ სიდიდე იქნება x–ის და 1–ის შეწონილი არითმეტიკული საშუალო. ეს ორი პირობა განსაზღვრავს აგრეგირების ოპერატორების დიდ ჯგუფს.

ფაქტობრივად, (1.4.1.2) და (1.4.1.3) წარმოადგენენ კერძო შემთხვევას, როცა $x = 0$ და $x = 1$ შესაბამისად (1.4.1.4) და (1.4.1.5)–თვის.

- *მონოტონურობა (არაკლებადი) (Monotonicity (Non Decreasing))*

აქ ჩვენ საქმე გვაქვს მკაცრად მონოტინურობასთან (არაკლებადია თითოეული ცვლადისთვის). ჩვენ ველით, რომ თუ არგუმენტი იზრდება, მაშინ საფინალო აგრეგაცია იზრდება (ან რჩება ტოლად):

$$y_i \geq x_i \quad \Rightarrow \quad Aggreg(y_1,....,y_i,....,y_n) \geq Aggreg(x_1,....,x_i,....,x_n) \qquad (1.4.1.6)$$

- *უწყვეტობა (Continuity)*

$Aggreg$ ფუნქცია უწვეტია, თუ ის უწყვეტია მისი თვითოეული ცვლადის მიმართ. ეს კი იძლევა საიმედოობის, განსაზღვრული თანმიმდევრულობისა და ქაოტური ქცევის გარანტიას.

- *ასოციაციურობა (Associativity)*

ეს საინტერესო თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ შესაძლებელია პაკეტების შეერთება. ჩვენ ველით, რომ პაკეტების ამორჩევა არ ახდენს გავლენას შედეგზე. სამი არგუმენტისთვის, იგი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$Aggreg(x_1, x_2, x_3) = Aggreg(Aggreg(x_1, x_2), x_3) = Aggreg(x_1, Aggreg(x_2, x_3)) \qquad (1.4.1.7)$$

ეს თვისება ხელსაყრელია, თუ ოპერატორი განსაზღვრულია მხოლოდ ორი ელემენტისთვის. ამ შემთხვევაში ასოციაციურობა საშუალებას იძლევა იგი გავაფართოვოთ n არგუმენტებით გაურკვევლობისა და ორაზროვნების გარეშე.

- *სიმეტრიულობა (Symmetry)*

ეს თვისება ცნობილია ასევე, როგორც ანონიმურობის თვისება. არგუმენტების თანმიმდევრობა გავლენას არ ახდენს შედეგზე. იგი აუცილებლობას წარმოადგენს, როცა აგრეგირებები კეთდება არგუმენტებისგან, რომელთაც გააჩნიათ ერთიდაიგივე მნიშვნელობა ან წარმოადგენენ ანონიმური ექსპერტების თუ წყაროების შეფასების შედეგს. $\forall \{1, 2, ..., n\}$ σ გადანაცვლებისთვის ოპერატორი აკმაყოფილებს შემდეგს:

$$Aggreg(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) = Aggreg(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1.4.1.8)$$

- *ბისიმეტრიულობა (Bisymmetry)*

ბისიმეტრიულობა (სარკისებური სიმეტრია) თვისებაა, რომელიც დაკავშირებულია n^2 შემავალი მონაცემების აგრეგირებასთან n-ური ოპერატორებისთვის. თუ ჩვენ შემავალ მონაცემებს ვაფორმირებთ კვადრატული მატრიცის სახით, მაშინ სარკისებური სიმეტრია ასახავს იმ ფაქტს, რომ არ აქვს მნიშვნელობა, თავდაპირველად აგრეგირებას ვუკეთებთ სვეტების ვექტორებს და შემდეგ მათ გამოსავალს, თუ პირველად აგრეგირდება სტრიქონების ვექტორი და შემდეგ შესაბამისი გამოსავალი მონაცემები. ამრიგად, A ბინარული ოპერატორისთვის ყველა $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ -თვის სამართლიანია:

$$A(A(x_{11}, x_{12}), A(x_{21}, x_{22})) = A(A(x_{11}, x_{21}), A(x_{12}, x_{22})) \qquad (1.4.1.9)$$

შენიშვნა: თუ ოპერატორი კომუტატიური და ასოციაციურია, მაშინ იგი აუცილებლად ბისიმეტრიულია. თუმცა არც კომუტატიურობა და არც ასოციაციურობა არ იგულისხმება ბისიმეტრიულობაში.

- *შთამნთქმელი ელემენტი (Absorbent Element)*

თუ აგრეგირების ოპერატორს გააჩნია *შთამნთქმელი ელემენტი* a, მაშინ იგი შეიძლება გამოყენებულ იქნას, როგორც აღმოფხვრის ანგარიში ან როგორც ვეტო (იგი შეიძლება მიჩნეულ იქნას როგორც საკვალიფიკაციო ანგარიში):

$$Aggreg(x_1, ..., a, ..., x_n) = a \qquad (1.4.1.10)$$

ამ ელემენტს ასევე უწოდებენ *გამანადგურებელს (Annihilator).*

- *ნეიტრალური ელემენტი (Neutral Element)*

თუ აგრეგირების ოპერატორს გააჩნია ნეიტრალური ელემენტი e, მაშინ იგი შეიძლება გამოვიყენებულ იქნას იმ არგუმენტთან დასაკავშირებლად, რომელიც არავითარ გავლენას არ ახდენს აგრეგირებაზე:

$$Aggreg^{[n]}(x_1,...,e,...,x_{n-1}) = Aggreg^{[n-1]}(x_1,...,x_{n-1}) \quad (1.4.1.11)$$

- *იდემპოტენციურობა (Idempotence)*

ეს თვისება ასევე ცნობილია, როგორც ერთპიროვნულობა ან შეთანხმებულობა. თუ ჩვენ აგრეგირებას ვახდენთ n რაოდენობა ერთიდაიგივე ელემენტზე, ჩვენ ვპოულობთ საწყის ელემენტს:

$$Aggreg(x,x,...,x) = x \quad (1.4.1.12)$$

ეს თვისება და *გამაძლიერებელი თვისება (Reinforcement)* არათავსებადია.

- *კომპენსაცია (Compensation)*

ეს თვისება ცნობილია, როგორც Pareto-ს თვისება. აგრეგირების შედეგი ნაკლებია ყველაზე მაღალ აგრეგირების ელემენტზე (მაქსიმუმი) და მეტია ვიდრე ყველაზე დაბალ აგრეგირების ელემენტზე (მინიმუმი):

$$\min_{i=1}^{n}(x_i) \le Aggreg(x_1,x_2,...,x_n) \le \max_{i=1}^{n}(x_i) \quad (1.4.1.13)$$

ეს თვისება არ უნდა აგვერიოს *გამთანასწორებელ (Counterbalancement)* თვისებაში.

- *გამთანასწორებელი (Counterbalancement)*

ზოგიერთი ავტორი უწოდებს როგორც კომპენსაციას. ეს იმას ნიშნავს, რომ გარკვეული უწესრიგობა ჩნდება წინა თვისებასთან მიმართებაში. ჩვენ გამთანასწორებელ თვისებას ვუწოდებთ ოპერატორის ქცევას, რომელიც ამცირებს საფინალო შედეგს თუ არსებობს არგუმენტები, რომლებიც შედიან საპირისპირო მიმართულებით.

$$\forall t \in]0,1[,\ \forall(x_1,...,x_n)\ \exists(y_1,...,y_m)$$

ისეთი, რომ $Aggreg(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = t$ (1.4.1.14)

- *გამაძლიერებელი (Reinforcement)*

ერთ-ერთი მახასიათებელი ადამიანური რესურსების ინფორმაციის დამუშავების მრავალი ტიპიდან, რომელიც განხილულია იაგერისა და რიბალოვის მიერ (Yager & Rybalov, 1998) იწოდება როგორც *სრულად გამაძლიერებელი (Full Reinforcement).* ამ თვისებით, ჩვენ გვინდა ყურადღება გავამახვილოთ ტენდეციაზე, რომელიც ერთის მხრივ წარმოადგენს მაღალი ქულების კოლექციას ერთმანეთის გასამყარებლად, რათა მივიღოთ საფინალო ანგარიში, ზევრად დამაჯერებელი, ვიდრე ნებისმიერი ცალ-ცალკე დამოუკიდებლად აღებული ქულა და მეორეს მხრივ, ტენდენცია, რომელიც წარმოადგენს დაბალი ქულების კოლექციას ერთმანეთის გასამყარებლად, რათა მივიღოთ საფინალო ქულა უფრო „disfirmative" ვიდრე რაიმე ინდივიდუალური ქულა. პირველ კონცეფციას უწოდებენ ზევით *მიმართულ გამაძლიერებელს (Upward Reinforcement),* ხოლო მეორე კონცეფციას - *ქვევით მიმართულ გამაძლიერებელს (Downward Reinforcement).* იაგერი გვიჩვენებს, რომ t-ნორმებს გააჩნია გამაძლიერებლის მხოლოდ ქვემოთ მიმართული ქცევა, მაშინ როცა t-კონორმებს გააჩნია გამაძლიერებელის მხოლოდ ზემოთ მიმართული ქცევა. ის ასევე გვიჩვენებს, რომ უნინორმებს გააჩნია სრული გამაძლიერებელი ქცევა.

ეს თვისება ძალიან საინტერესოა. მაგალითად, სამედიცინო დიაგნოსტიკაში მრავალი სიმპტომის გამოჩენა, რომელიც ახასიათებს ავადმყოფობას, იძლევა მეტი დამაჯერებლობის გარანტიას პაციენტის დიაგნოსტირებისას.

- *სტაბილურობა წრფივი ფუნქციისთვის (Stability for a Linear Function)*

ეს თვისება ახდენს ოპერატორის სტაბილურობას განზომილების მასშტაბის შეცვლისთვის:

$$Aggreg(r \cdot x_1 + t, r \cdot x_2 + t ..., ..., r \cdot x_n + t) = r \cdot (Aggreg(x_1, x_2, ..., x_n)) + t \qquad (1.4.1.15)$$

როცა $r \geq 0$, მაშინ ჩვენ ვსაუბრობთ სტაბილურობაზე დადებითი წრფივი ტრანსფორმაციისთვის. ფართოდ გავრცელებული კერძო შემთხვევაა *თვითდუალურობა (Self-duality)* (Klir & Folger, 1988; Grabisch, Nguyen & Walker, 1995). ეს შეესაბამება სტაბილურობას წრფივი ფუნქციისთვის, როცა $r = -1$ და $t = 1$.

- *ინვარიანტულობა (Invariance)*

როცა $(x_1, x_2, .\ x_n.)$ აგრეგირების რიცხვები წარმოადგენენ განსაზღვრული კრიტერიუმების ზომას, ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ მასშტაბი, რომელშიც იყო წარმოდგენილი ეს ზომები.

ნებისმიერი დასაშვები f ტრანსფორმაციისთვის, გვექნება:

$$Aggreg(f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)) = f \cdot (Aggreg(x_1, x_2,..., x_n)) \qquad (1.4.1.16)$$

ქცევითი თვისებები:

- *გადაწყვეტილებათა ქცევა (Decisional Behavior)*

მოსახერხებელია გვქონდეს შესაძლებლობა განისაზღვროს გადაწყვეტილების მიმღები პირის ქცევა (behavior of DM). მაგალითად, ტოლერანტული, ოპტიმისტური, მესიმისტური ან მკაცრი. ეს ქცევები არსებობს მრავალ კრიტერიალურ ამოცანებში, რომლებიც ჩვეულებრივ იწოდებიან *დიზიუნქციურ (Disjunctive)* და *კონიუნქციურ (Conjunctive)* ქცევებად.

- *პარამეტრების ინტერპრეტირება (Interpretability of the Parameters)*

ვიმედოვნებთ, რომ პარამეტრებს გააჩნია თითქმის აშკარა სემანტიკური ინტერპრეტაცია. ეს თვისება კრძალავს შავი ყუთის მეთოდოლოგიის გამოყენებას.

- *წონები არგუმენტებზე (Weights on the Arguments)*

ძალიან მნიშვნელოვანია გვქონდეს შესაძლებლობა გამოვხატოთ არგუმენტებზე წონები. ეს უკანასკნელი შეიძლება იქნას გააზრებული, როგორც ზოგიერთი არგუმენტისთვის უპირატესობის (პრივილეგიის) მინიჭება.

1.4.2. აგრეგირების ძირითადი ოპერატორები

1.4.2.1. არითმეტიკული საშუალო

ყველაზე უმარტივესი და ფართოდ გავრცელებული საშუალება აგრეგირების ოპერაციისა, არის ჩვეულებრივი საშუალო არითმეტიკული მნიშვნელობის გამოყენება (ასევე ცნობილია, როგორც *საშუალო არითმეტიკული (The Arithmetic Mean)*). მათემატიკურად გვაქვს შემდეგი:

$$M(x_1,\ x_2,..., x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot x_i\right). \qquad (1.4.2.1.1)$$

ეს ოპერატორი საინტერესოა, რადგან ის იძლევა აგრეგირებულ მნიშვნელობას, რომელიც ნაკლებია უდიდეს არგუმენტზე და მეტია უმცირესზე. ამიტომ, საფინალო აგრეგაცია წარმოადგენს შუალედურ მნიშვნელობას ე.წ. „a middle value“. ეს თვისება ცნობილია, როგორც კომპენსაციის თვისება (იხ. სექცია 1.4.1.2.). საშუალოს იყენებენ ხშირად სიმარტივის და იმ თვისებების გამო, რომელსაც იგი აკმაყოფილებს. ესენია: მონოტონურობა, უწყვეტობა, სიმეტრიულობა, ასოციაციურობა, იდემპოტენტურობა და სტაბილურობა წრფივი ტრანსფორმაციისთვის. მაგრამ მას არ გააჩნია არც შთანმთქავი არც ნეიტრალური ელემენტი და არც არანაირი ქცევითი თვისება.

1.4.2.2. წონითი საშუალო

აქ არსებობს კლასიკური გაფართოება წონითი ვექტორისა, რომელიც უფლებას იძლევა არგუმენტებზე წონების განთავსებისა, მაგრამ იგი თავისუფალია სიმეტრიულობის თვისებისგან. მას უწოდებენ *წონით საშუალოს (The Weighted Mean)* და მათემატიკურად ეს უკანასკნელი ასე გამოიყურება:

$$M_{w_1, w_2, \ldots, w_n}(x_1,\, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(w_i \cdot x_i\right), \tag{1.4.2.2.1}$$

სადაც წონები არა უარყოფითია და $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

1.4.2.3. მედიანა

მეორე ოპერატორი, რომელიც ავითარებს იდეას იყოს „a middle value“ არის *მედიანა (The Median).* ის გულისხმობს არგუმენტების დალაგებას ზრდადობით და შემდეგ შუა ელემენტის ამოღებას. თუ ელემენტების რაოდება არ არის კენტი, მაშინ არ გვაქვს შუა ელემენტი, არამედ საქმე გვაქვს შუა ელემენტების წყვილთან. ჩვენ ვიღებთ ამ წყვილის საშუალო არითმეტიკულს. ეს აგრეგირების ოპერატორი აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს: სასაზღვრო პირობები, მონოტონურობა, სიმეტრიულობა, იდემპოტენტურობა და ცხადი ქცევა კომპენსაციისა.

არსებობს აღნიშნული ოპერატორის გაფართოება: *k-დალაგებული სტატისტიკა (The k-order Statistic),* რომლითაც ჩვენ შეგვიძლია ავირჩიოთ k-ური ელემენტი დალაგებული სიიდან (უმცირესი ელემენტიდან უდიდესი ელემენტისკენ). დღეისათვის ნაშრომებში

უფრო მეტად წარმოადგენილია მედიანაზე დაფუძნებული გაფართოებული ოპერატორები (The General Median-based Operators) (Calvo & Mesiar, 1999).

1.4.2.4. მინიმუმი და მაქსიმუმი

მინიმუმი და მაქსიმუმი (The Minimum and The Maximum) ასევე წარმოადგენენ აგრეგირების ძირითად ოპერატორებს. მინიმუმი იძლევა სიმრავლის ყველაზე პატარა სიდიდეს, ხოლო მაქსიმუმი - ყველაზე დიდ სიდიდეს. ისინი არ იძლევიან „საშუალო ღირებულება“-ს, მაგრამ ისინი შეიძლება იყოს ძალიან მნიშვნელოვანი სხვადასხვა კონტექსტში. მაგალითად, გადაწყვეტილების მიღების კონტექსტში მინიმუმის ოპერატორი ქმნის კონიუნქციურ დამოკიდებულებას (უნდა აღინიშნოს, რომ ეს არის t-ნორმა, ხოლო მაქსიმუმი წარმოადგენს t-კონორმას და გააჩნია დიზიუნქციური ქცევა.

როგორც აგრეგირების ოპერატორები, ისინი აკმაყოფილებენ აქსიომებს (იდენტურობა როცა ერთადგილიანია, სასაზღვრო ამოცანები, არა კლებადობა). ამას გარდა საინტერესოა ამ ორი ოპერატორის ძირითადი თვისებები: მონოტონურობა, სიმეტრიულობა, ასოციაციურობა, იდემპოტენტურობა. მათ გააჩნიათ კომპენსაციის ქცევა, მაგრამ შეზღუდულ ვარიანტებში. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ამ ოპერატორების გამოყენებით ჩვენ ვერასდროს მივიღებთ გასაშუალებულ აგრეგირებულ მნიშვნელობას. ამიტომ ჩვენ არ ვსაუბრობთ კომპენსაციის ქცევაზე ასეთ შემთხვევაში.

თუ ჩვენ ვმუშაობთ შემოსაზღვრულ $[a,b]$ ინტერვალში, მინიმუმს გააჩნია შთანმთქმელი ელემენტისთვის a და ნეტრალური ელემენტისთვის b, ხოლო მაქსიმუმისთვის იქნება საპირისპირო შემთხვევა: a შთანმთქმელი და b ნეიტრალური ელემენტების როლში.

1.4.2.5. წონითი მინიმუმი და წონითი მაქსიმუმი

საინტერესოა ამ ოპერატორებისთვის წონების მინიჭება, ისევე როგორც საშუალო არითმეტიკულის შემთხვევაში, მაგრამ აქ არ გვაქვს არანაირი სტანდარტული გადაწყვეტა. მაგალითად, იაგერი, ასევე დუბუა და პრადი (Klir & Folger, 1988)) გვთავაზობს შემდეგ წონითი *მინიმუმის და წონითი მაქსიმუმის*

ოპერატორებს (The Weighted Minimum and The Weighted Maximum), სადაც წონები არაუარყოფითია და $\max_{i=1}^{n}(w_i)=1$:

$$\min^{\oplus}_{w_1,..,w_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\min_{i=1}^{n}[\max(1-w_i,x_i)] \quad (1.4.2.5.1)$$

$$\max^{\oplus}_{w_1,..,w_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\max_{i=1}^{n}[\min(w_i,x_i)] \quad (1.4.2.5.2)$$

ამ ორ ოპერატორს გააჩნია საინტერესო თვისება. თუ $w_i=0$, მაშინ x_i არგუმენტი არ მიიღება მხედველობაში. ასევე თუ ყველა წონები ტოლია, ჩვენ ვღებულობთ მინიმუმს და მაქსიმუმს შესაბამისად. ეს ოპერატორები კრიტიკის ობიექტები არიან, რადგან შესაძლოა გავზარდოთ ერთ-ერთი წონა (არგუმენტის მნიშვნელობა) რაიმე ცვლილების გარეშე შედეგში. მათემატიკურად ეს ფაქტი ნიშნავს იმას, რომ ეს ოპერატორები არ არიან მკაცრად მონოტონურები წონების მიმართ (not strictly monotone with respect to the weights) (ისინი რა თქმა უნდა მონოტონურია).

ფაგინმა და ვიმერმა (Fagin & Wimmers, 2000) შემოგვთავაზეს ნებისმიერი აგრეგირების ოპერატორისთვის ზოგადი მეთოდი წონების გაერთიანებისათვის. აღნიშნული მეთოდით ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ წონითი მინიმუმის და წონითი მაქსიმუმის ოპერატორებს:

$$\min^{\oplus}_{w_1,..,w_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[i\cdot(w_{\sigma(i)}-w_{\sigma(i+1)})\cdot\min\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},...,x_{\sigma(i)}\right)\right] \quad (1.4.2.5.3)$$

$$\max^{\oplus}_{w_1,..,w_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[i\cdot(w_{\sigma(i)}-w_{\sigma(i+1)})\cdot\max\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},...,x_{\sigma(i)}\right)\right] \quad (1.4.2.5.4)$$

სადაც წონები არაუარყოფითია, $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$, σ არის გადანაცვლება, რომელიც დაალაგებს წონებს შემდეგნაირად: $w_{\sigma(1)}\geq w_{\sigma(2)}\geq...\geq w_{\sigma(n)}$ და $w_{\sigma(n+1)}=0$.

ამ შემთხვევაში ნებისმიერი წონის ცვლილება იწვევს შედეგის ცვლილებას. ავტორები აღნიშნავენ, რომ ეს ოპერატორები სტაბილურია ნებისმიერი დადებითი წრფივი ტრანსფორმაციისთვის, ისევე როგორც მინიმუმი და მაქსიმუმი; შევნიშნოთ, რომ ეს არის არის ის შემთხვევა, რაც (1.4.2.5.1) და (1.4.2.5.2)-ში.

1.4.2.6. კვაზი -არითმეტიკული საშუალო

პრაქტიკაში დანერგილია არითმეტიკული საშუალოს გაფართოებები, როგორიცაა:

გეომეტრიული საშუალო :

$$M_{geometric}(x_1,\ x_2,...,x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (1.4.2.6.1)$$

და

ჰარმონიული საშუალო:

$$M_{harmonic}(x_1,\ x_2,...,x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} \qquad (1.4.2.6.2)$$

ფაქტიურად ეს ოპერატორები მიეკუთვნება *კვაზი–არითმეტიკული საშუალოების ოჯახს (Family of Quasi-arithmetic Means),* რომელიც დეტალურად შესწავლილია კოლმოგოროვისა (Kolmogorov, 1930) და აზელის (Aczel, 1966; Mesiar & Komorníková, 1997)) მიერ და განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$M_f(x_1,\ x_2,...,x_n) = f^{-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] = f^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot f(x_i)\right)\right] \qquad (1.4.2.6.3)$$

სადაც f არის მკაცრად მონოტონური უწყვეტი ფუნქცია. უნდა აღინიშნოს, რომ f გენერატორი არ არის უნიკალური. მაგალითად, შეიძლება განვიხილოთ გენერატორის წრფივი კომბინაცია: $f'(x) = a\cdot f(x) + b$, სადაც $a \neq 0$.

შევნიშნოთ, რომ გეომეტრიული საშუალო (1.4.2.6.1) წარმოადგენს (1.4.2.6.3)–ის კერძო შემთხვევას, როცა $f(x) = \log x$, ხოლო ჰარმონიული საშუალო (1.4.2.6.2) წარმოადგენს (1.4.2.6.3)–ის კერძო შემთხვევას, როცა $f(x) = \frac{1}{x}$.

განსაკუთრებულ ყურადღებას იპყრობს ის შემთხვევა, როცა არსებობს ისეთი x_i და x_j არგუმენტები, რომ $f(x_i) = -\infty$ და $f(x_j) = +\infty$. ამ შემთხვევაში დამატებით უნდა იყოს განსაზღვრული შეთანხმება მინუს უსასრულობისთვის და პლიუს უსასრულობისთვის.

ყველაზე გავრცელებული კერძო შემთხვევა შესწავლილი იქნა დუიმოვიჩის (Klir & Wierman, 1998) და დიკოფის მიერ f ფუნქციისთვის (Dyckhoff &Pedrycz, 1984), განსაზღვრული შემდეგნაირად: $f : x \to x^{\alpha}$. ჩვენ ვღებულობთ კვაზი–არითმეტიკულ საშუალოს შემდეგი ფორმულირებით:

$$M(x_1,\, x_2, ..., x_n) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot x_i^{\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (1.4.2.6.4)$$

ეს ოჯახი ძალიან საინტერესოა, რადგან ის აზოგადებს საშუალოების ჯგუფს, მხოლოდ α პარამეტრის ცვლილებით:

- თუ $\alpha = 1$, მაშინ ვღებულობთ არითმეტიკულ საშუალოს.
- თუ $\alpha = 2$, მაშინ ვღებულობთ კვადრატულ საშუალოს (ასევე ცნობილია, როგორც ევკლიდეს საშუალო).
- თუ $\alpha = -1$, მაშინ ვღებულობთ ჰარმონიულ საშუალოს.
- როცა α მიისწრაფვის $-\infty$–სკენ, ფორმულა (1.4.2.6.4) მიისწრაფვის მაქსიმუმი ოპერატორისკენ.
- როცა α მიისწრაფვის $+\infty$–სკენ, ფორმულა (1.4.2.6.4) მიისწრაფვის მინიმუმი ოპერატორისკენ.
- როცა α მიისწრაფვის 0–სკენ, ფორმულა (1.4.2.6.4) მიისწრაფვის გეომეტრიული საშუალოსკენ.

1.4.2.7. სიმეტრიული ჯამი

სიმეტრიულ ჯამს (Symmetric Sum) ვუწოდებთ უწყვეტ თვითდუალურ S ოპერატორს. თვითდუალურობა განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$S(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 - S(1 - x_1, 1 - x_2, ..., 1 - x_n) \qquad (1.4.2.7.1)$$

ეს ოპერატორი დეტალურად შესწავლილია სილვერტის მიერ (Klir & Folger, 1988). მან გვიჩვენა, რომ ორი არგუმენტის სიმეტრიული ჯამი შეიძლება დავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$S(x, y) = \frac{G(x, y)}{G(x, y) + G(1 - x, 1 - y)} \qquad (1.4.2.7.2)$$

სადაც G არის უწყვეტი, ზრდადი, დადებითი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს $G(0,0)=0$. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს არ არის უნიკალური ფუნქცია თითოეული სიმეტრიული ჯამის აღსაწერად. ასევე მნიშვნელოვანია შევნიშნოთ, რომ ჩვენ ვიყენებთ შემდეგ შეთანხმებას: $\frac{0}{0}=\frac{1}{2}$.

შევნიშნოთ, რომ სიმეტრიული ჯამი ზოგადად არ არის სიმეტრიული და კომუტატიური. სიმეტრიული ჯამის კარგი მაგალითია წონითი საშუალო.

საინტერესო კერძო შემთხვევას წარმოადგენს *დამატება განზოგადოებული აგრეგირების ოპერატორისა (The Additive Generated Aggregation):*

$$S_f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = f^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] \quad (1.4.2.7.3)$$

სადაც f გენერატორი არის მკაცრად მონოტონური უწყვეტი ფუნქცია გაფართოებულ ნამდვილ წრფეზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგს:

$$f(x) + f(1-x) = 0 \quad (1.4.2.7.4)$$

ამ შემთხვევაში, ჩვენ ვღებულობთ ასოციაციურ სიმეტრიულ ჯამს.

თუ f–ის დიაპაზონია $[-\infty, +\infty]$, მაშინ ჩვენ ვღებულობთ ასოციაციურობას $[0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$–ზე.

1.4.3. OWA-ს ტიპის აგრეგირების ოპერატორები

OWA ოპერატორები (Ordered Weighted Averaging Operators) – დალაგებული წონითი აგრეგირების ოპერატორები გაგვაცნო იაგერმა (Yager, 1988) აგრეგირების ქულების მნიშვნელობების უზრუნველსაყოფად, რომლებიც ასოცირდება მრავალ კრიტერიუმიანი ამოცანების დასაკმაყოფილებლად და რომელიც ერთ ოპერატორში აერთიანებს კონიუნქციურ და დიზიუნქციურ ქცევას:

$$OWA(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_{\sigma(j)} \quad (1.4.3.1)$$

სადაც σ არის გადანაცვლება, რომელიც ელემენტებს ალაგებს შემდეგნაირად: $x_{\sigma(1)} \le x_{\sigma(2)} \le ... \le x_{\sigma(n)}$. ყველა წონა არაუარყოფითია ($w_i \ge 0$) და მათი ჯამი 1–ის ტოლია ($\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$).

ეს ოპერატორი, როგორც დამტკიცდა, ძალიან მოსახერხებლია მისი მრავალმხრივობის გამო და იგი რედაქტირებული იქნა 1997–ში იაგერისა და კაქპრჟიკის მიერ (Yager & Kacprzyk, 1997).

OWA ოპერატორები წარმოადგენენ აგრეგირების ოპერატორების პარამეტრიზებულ ოჯახს, რომელიც მოიცავს ბევრს ცნობილ ოპერატორებს, როგორებიცაა: მაქსიმუმი, მინიმუმი, k–დალაგებული სტატისტიკა, მედიანა და არითმეტიკული საშუალო. ამ ოპერატორების კერძო შემთხვევების მისაღებად ჩვენ უნდა ავარჩიოთ კერძო წონები (იხ. ცხრილი 1.4.3.1).

	OWA
მინიმუმი	$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_i = 0 \; if \; i \neq 1 \end{cases}$
მაქსიმუმი	$\begin{cases} w_n = 1 \\ w_i = 0 \; if \; i \neq n \end{cases}$
მედიანა	$\begin{cases} w_{\frac{n+1}{2}} = 1 & if \;\; n \; is \; odd \\ w_{\frac{n}{2}} = \dfrac{1}{2} \;\; and \;\; w_{\frac{n}{2}+1} = \dfrac{1}{2} & if \;\; n \; is \; even \\ w_i = 0 & else \end{cases}$
k–დალაგებული სტატისტიკა	$\begin{cases} w_k = 1 \\ w_i = 0 \; if \; i \neq k \end{cases}$
არითმეტიკული საშუალო	$w_i = \dfrac{1}{n} \quad for \; \forall i$

ცხრილი 1.4.3.1. OWA ოპერატორის კერძო შემთხვევები.

OWA ოპერატორები აკმაყოფილებენ კომუტატიურობის, მონოტონურობის, იდემპოტენციურობის თვისებებს. ისინი სტაბილური არიან დადებითი წრფივი ტრანსფორმაციის მიმართ. მათ გააჩნიათ კომპენსაციის ქცევა. ეს უკანასკნელი თვისება აღნიშნავს იმას, რომ OWA ოპერატორის აგრეგირების შედეგი ყოველთვის მოთავსდება მინიმუმსა და მაქსიმუმს შორის. რაც ეს ოპერატორი განაზოგადებს მინიმუმს და მაქსიმუმს, ეს შეიძლება განვიხილოთ პარამეტრიზებული გზა გადაადგილებისა min მნიშვნელობიდან

max მნიშვნელობისკენ. ამ კონტექსტში იაგერმა (Yager, 1988) შეიმუშავა maxness ხარისხი (იგივე orness), განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$\max ness(w_1, w_2, ..., w_n) = \sum_{j=1}^{n} w_{n-j+1} \cdot \frac{n-j}{n-1} = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \frac{j-1}{n-1}. \qquad (1.4.3.2)$$

ნათელია, რომ მინიმუმისთვის ჩვენ გვაქვს $\max ness(1,0,...,0) = 0$, ხოლო მაქსიმუმისთვის გვაქვს $\max ness(0,0,...,1) = 1$.

სხვა ოპერატორი იქნა შემუშავებული იაგერის მიერ (Yager, 1988) და გამოყენებული ო'ჰეგანის (O'Hagan, 1988) მიერ OWA ოპერატორის კერძო შემთხვევის დასახასიათებლად. ეს ხარისხი აღწერს წონების დისპერსიას და ის დაფუძნებულია ენტროპიის იდეაზე:

$$dispersion(w_1, w_2, ..., w_n) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \ln(w_j). \qquad (1.4.3.3)$$

ერთ–ერთი უმნიშვნელოვანესი საკითხი ამ ოპერატორების გამოყენებისა მდგომარეობს წონების წარმოშობის შესაბამისი მეთოდოლოგიის განვითარებაში. ორი ყველაზე გავრცელებული მიდგომა მდგომარეობს შემდეგში:

პირველი მათგანი შემუშავდა ო'ჰეგანის (O'Hagan, 1988) მიერ და იყენებს maxness–ისა და dispersion-ის ზომებს. ამ მიდგომაში მოითხოვება მხოლოდ ის, რომ მომხმარებელმა უზრუნველყოს $\alpha \in [0,1]$ მნიშვნელობა maxness–ის შესაბამისი ხარისხთან შესაბამისობაში. იდეა მდგომარეობს წონების დისპერსიის მაქსიმიზაციაში ფიქსირებული maxness–ის შეზღუდვით. შემდეგი მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანა ითვლის წონებს მოცემული α –თვის (იხ. ცხრილი 1.4.3.2).

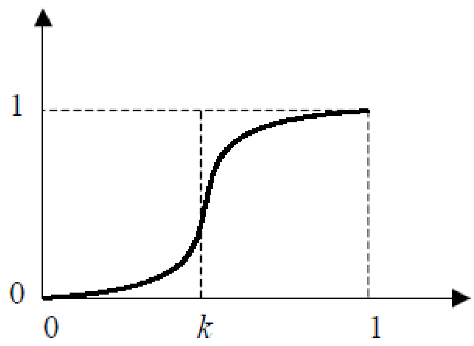
მეორე მიდგომა აგრეგირებისათვის იყენებს ლინგვისტური კვანტორის ცნებას (Zadeh, 1993). ჩვენ ვართ დაინტერესებულები შემდეგნაირად განმარტებული მუდმივად ზრდადი მონოტონური კვანტორებით:

- $Q(0) = 0$ და $Q(1) = 1$.
- თუ $x \le y$, მაშინ $Q(x) \le Q(y)$.

ეს კვანტორები თარგმნის შემდეგ ცნებებს: უმრავლესობა (most), თითქმის ყველა (almost all), ბევრი (many), სულ ცოტა ნახევარი მაინც (at least half) და ზოგიერთი (some).

ამ სახის კვანტორებზე დაყრდნობით იაგერმა (Yager, 1988) შემგვთავაზა წონების გამოსათვლელად შემდეგი ფორმულის გამოყენება:

$$w_j = Q\left(\frac{n-j+1}{n}\right) - Q\left(\frac{n-j}{n}\right) \qquad (1.4.3.4)$$



სურათი 1.4.3.1. მუდმივად ზრდადი მონოტონური კვანტორი „სულ მცირე k%“.

მაქსიმიზაცია $-\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \ln(w_j)$ (დისპერსია)
შეზღუდვები: – $\max ness(w_1, w_2, ..., w_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \frac{j-1}{n-1} = \alpha$ – $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ – $0 \le w_j \le 1$

ცხრილი 1.4.3.2. მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანა OWA-ს წონების გამოთვლაზე.

ამ მიდგომის გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ მიზნის ფუნქცია შემდეგი შეზღუდვით:

Q კრიტერიუმი უნდა იქნეს დაკმაყოფილებული (Q criteria should be satisfied)

ამ მიდგომის საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ ერთი ზღვრული შემთხვევა. მაგალითად, თუ ჩვენ გვინდა „სულ მცირე 100%“ კრიტერიუმისა იყოს დაკმაყოფილებული, მაშინ ჩვენ შევნიშნავთ, რომ OWA ოპერატორები წარმოადგენენ მინიმუმს და როცა მინიმუმი დაკმაყოფილებულია, მაშინ ყველა სხვა კრიტერიუმი დაკმაყოფილებულია.

1.4.4. განზოგადოებული OWA-ს ტიპის აგრეგირების ოპერატორები

1.4.4.1. OWG ოპერატორი

OWG ოპერატორი დაფუძნებულია OWA ოპერატორსა და გეომეტრიულ საშუალოზე. აქედან გამომდინარე იგი აერთიანებს OWA ოპერატორისა და გეომეტრიულ საშუალოს უპირატესობებს

განსაზღვრება 1.4.4.1.1. m განზომილებიან OWG ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე: $\Phi^G : R^m \to R$, რომელიც ასოცირებულია წონების სიმრავლესთან ან ექსპონენციალურ წონების ვექტორთან $W = \{w_1, w_2,,,, w_m\}$ და რომელზეც სრულდება შემდეგი პირობები:

1. $w_i \in [0,1]$
2. $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$.

და აგრეგირებისათვის განსაზღვრული მნიშვნელობების სიმრავლისათვის $\{a_1, a_2,,,, a_m\}$ განიმარტება შემდეგი ფორმულით:

$$\Phi^G (a_1, a_2, ..., a_m) = \mathop{\mathrm{X}}_{i=1}^{m} c_i w_i \ . \qquad (1.4.4.1.1.1)$$

სადაც C არის მნიშვნელობების დალაგებული ვექტორი, თითოეული ელემენტისთვის სრულდება პირობა - $c_i \in C$ i-ური უდიდესი ელემენტია $\{a_1, a_2,,,, a_m\}$ ერთობლიობაში.

ამ ოპერატორს გააჩნია შემდეგი თვისებები: შემოსაზღვრულობა, კომუტატიურობა, იდემპოტენციურობა, ზრდადი მონოტონურობა.

1.4.4.2. GOWA ოპერატორი

OWA ოპერატორის განვითარების შემდეგი ეტაპია GOWA ოპერატორი (Yager, 1993). მას გააჩნია დამატებით პარამეტრი, რომლის ხარისხშიც არის აყვანილი არგუმენტების მნიშვნელობა. ფორმულით GOWA ასე გამოისახება: იგი არის n განზომილებიანი აგრეგირების ოპერატორი $F : I^n \to I$ წარმოდგენილი, როგორც:

$$F(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i b_i^{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} . \qquad (1.4.4.2.1)$$

სადაც $W=\{w_1,w_2,,,,w_m\}$ არის წონების ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს ნორმალიზაციის პირობებს: $w_j\in[0,1]$, $(j=1,2,...n)$; $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$; b_j არის j-ს უდიდესი რიცხვითი მნიშვნელობა $\{a_1,a_2,,,,a_n\}$ სიმრავლეში. λ არის პარამეტრი, რომელიც მნიშვნელობებს ღებულობს $(-\infty,0)$ და $(0,+\infty)$ ინტერვალებში. $I=[0,1]$ დახურული ინტერვალია.

GOWA ოპერატორის F ფუნქცია არის კომუტატიური, იდენპოტენციური, შემოსაზღვრული და მონოტონური.

1.4.4.3. IOWA ოპერატორი

იაგერმა და ფილევმა (Engemann , Filev, Yager, 1996) წარმოადგინა ახალი OWA -ს ტიპის ოპერატორი, რომელსაც უწოდეს *ინდუცირებული დალაგებული შეწონილი გასაშუალების (The Induced Ordered Weighted Averaging)* – IOWA ოპერატორი.

n განზომილებიან IOWA ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე: $\Phi_w:(R\times R)^n\to R$, რომელთანაც ასოცირებულია წონების სიმრავლე $W=\{w_1,w_2,,,,w_m\}$, ისე , რომ

$w_i\in[0,1]$, $(i=1,2,...n)$; $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$.

და $U=\{u_1,u_2,,,,u_n\}$ ინდუცირების ვექტორი. იგი განიმარტება შემდეგი ფორმულით:

$$\Phi_w(\langle u_1,p_1\rangle,...,\langle u_n,p_n\rangle)=\sum_{i=1}^{n}w_i\cdot p_{\sigma(i)}. \qquad (1.4.4.3.1)$$

სადაც $\sigma:\{1,..n\}\to\{1,..n\}$, თითოეული გადანაცვლებისთვის სრულდება შემდეგი პირობა: $u_{\sigma(i)}\geq u_{\sigma(i+1)}$, $\forall i=1,2,...,n-1$ ე.ი. $\langle u_{\sigma(i)},p_{\sigma(i)}\rangle$ ეს არის მეორე წყვილი, რომელშიც $u_{\sigma(i)}$ $\forall i$ -თვის არის i-ური უდიდესი მნიშვნელობა $\{u_1,u_2,,,,u_n\}$ სიმრავლეში. აგრეგირებისათვის განსაზღვრულ დალაგებულ მნიშვნელობების სიმრავლეში $\{p_1,p_2,,,,p_n\}$ სიმრავლე არის დაზუსტების აღწერა, რომელიც კავშირშია $\{u_1,u_2,,,,u_n\}$ მნიშვნელობების სიმრავლესთან. ამ ყველაფერს იაგერმა და ფილევმა უწოდეს დალაგებული დაზუსტებული არგუმენტები $\{p_1,p_2,,,,p_n\}$, რომელიც წარმოადგენს ძირითად განსხვავებას OWA და IOWA ოპერატორებს შორის.

1.4.4.4. IGOWA ოპერატორი

იაგერმა და ფილევმა (1999) წარმოგვიდგინა ახალი - IGOWA ოპერატორი, რომელიც არის OWA ოპერატორის განზოგადოება და რომელიც შემდეგნაირად განიმარტება:

n განზომილებიან IGOWA ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე: $IGOWA: R^n \times R^n \to R$, რომელთანაც ასოცირებულია წონების სიმრავლე $W = \{w_1, w_2, ,, , w_m\}$, ისე, რომ $w_j \in [0,1]$, $(j = 1,2,...n)$; $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ და იგი განიმარტება შემდეგი ფორმულით:

$$IGOWA(\langle u_1, a_1\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot b_j^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}. \qquad (1.4.4.4.1)$$

სადაც b_j არის a_i-ის IGOWA-ს $\langle u_i, a_i\rangle$ წყვილის მნიშვნელობა, რომელშიც არის j ჯერადი უდიდესი მნიშვნელობა u_i-ს; u_i არის დალაგებული ინდუცირებული ცვლადი, a_i არის ცვლადი არგუმენტი და λ არის პარამეტრი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, გარდა $\lambda = 0$.

1.4.4.5. IOWG ოპერატორი

n განზომილებიან IOWG ოპერატორი წარმოადგენს ფუნქციას $\Phi_w^G : (R \times R^+)^n \to R^+$, რომელთანაც ასოცირებულია წონების სიმრავლე $W = \{w_1, w_2, ,, , w_m\}$ და მათზე სრულდება პირობა $w_i \in [0,1]$, $(i = 1,2,...n)$; $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ და ის არის განსაზღვრული აგრეგირებისათვის მეორე არგუმენტის სიმრავლეზე, რომელიც თავის მხრივ არის წყვილი დამოკიდებულებების სიმრავლე $\{\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_2, a_2\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle\}$, რაც საფუძველია დადებითი შედეგისა. ამის მიხედვით განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულება:

$$\Phi_w^G(\langle u_1, a_1\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle) = \prod_{i=1}^{n} \left(a_{\sigma(i)}\right)^{w_i}. \qquad (1.4.4.5.1)$$

სადაც $\sigma : \{1, \,.\,.\, n\} \to \{1, \,.\,.\, n\}$, თითოეული გადანაცვლებისთვის სრულდება შემდეგი პირობა: $u_{\sigma(i)} \ge u_{\sigma(i+1)}$, $\forall i = 1,2,..., n-1$ ე.ი. $\langle u_{\sigma(i)}, p_{\sigma(i)}\rangle$ ეს არის ისეთი წყვილი

დამოკიდებულება, სადაც $u_{\sigma(i)}$ არის j-ური უდიდესი მნიშვნელობა $\{u_1, u_2,,,, u_n\}$ სიმრავლეში.

1.4.4.6. POWA ოპერატორი

ალბათური დალაგებული შეწონილი გასაშუალების (POWA) ოპერატორი არის გაფართოება OWA ოპერატორისა. POWA ოპერატორის გამოყენება მოსახერხებელია ისეთ შემთხვევაში, როდესაც ჩვენ გვაქვს ალბათური ინფორმაცია. ეს მიდგომა წარმოადგენს მიმართებას OWA ოპერატორსა და ალბათობებს შორის.

n განზომილებიანი POWA ოპერატორი არის მიმართება $POWA: R^n \to R$, რომელთანაც ასოცირებულია წონების n განზომილებიანი ვექტორი $W = \{w_1, w_2,,,, w_m\}$, სადაც სრულდება პირობა $w_j \in [0,1]$, $(j = 1,2,...n)$; $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ და სამართლიანია ფორმულა:

$$POWA(a_1, a_2,.., a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j \cdot b_j . \qquad (1.4.4.6.1)$$

სადაც b_j არის j -ური უდიდესი ელემენტი ერთობლიობაში a_i (ეს იმას ნიშნავს, რომ აგრეგირების a_i -არგუმენტები დალაგებულია კლებადობით). თითოეულ a_i არგუმენტთან ასოცირებულია შესაძლებლობები v_i, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ და $v_i \in [0,1]$, $\hat{v} = \beta w_j + (1-\beta) v_j$, სადაც $\beta \in [0,1]$ და v_j არის ალბათობა, რომელიც დალაგებულია b_j -ს მსგავსად. ასევე შესაძლებელია POWA ოპერატორის ფორმულირება ისე, რომ დაიყოს ორ ნაწილად: OWA ოპერატორად და იმ ნაწილად, რომელზეც ახდენს გავლენას ალბათური განაწილება, რომლის განსაზღვრება ასეთია:

POWA ოპერატორი არის მიმართება $POWA: R^n \to R$, n განზომილებით, რომელსაც გააჩნია ასოცირებული შეწონილი ვექტორი $W = \{w_1, w_2,,,, w_n\}$, სადაც $w_j \in [0,1]$, $(j = 1,2,...n)$; $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ და ალბათობების ვექტორი V, რომელზეც სრულდება პირობა $v_i \in [0,1]$, $(i = 1,2,...n)$; $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$. აქედან გამომდინარეობს შემდეგი ფორმულა:

$$POWA(a_1, a_2, .., a_n) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot a_i . \quad (1.4.4.6.2)$$

სადაც b_j არის j-ური უდიდესი ელემენტი ერთობლიობაში a_i და $\beta \in [0,1]$.

1.4.4.7. AsPOWA ოპერატორი

OWA ოპერატორი, რომელიც ზემოთ ავღნიშნეთ პირველად განმარტებული იყო იაგერის მიერ, მისი ალბათური განზოგადოების ერთი ვარიანტი POWA წარმოადგინა მერიგომ, სადაც გარდა ობიექტური წონებისა ფაქტორებზე არსებობს მათი განხორციელების ალბათობები, ფაქტიურად POWA არის OWA-ს და ალბათური მოლოდინის შეწონილი, რომელიც შემდეგი ფორმულით განიმარტება:

$$POWA(a_1, a_2, .., a_n) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot a_i . \quad (1.4.4.7.1)$$

ხშირად პრაქტიკულ ამოცანებში ფაქტორებზე ალბათური განაწილება არ არის ცნობილი. ეს მაშინ ხდება როდესაც ახალი ამოცანები იგეგმება, განსაკუთრებით ეს სტრატეგიულ მენეჯმენტში გვხდება, სადაც ფაქტორები-განხორციელების ხარისხები უნდა იყოს შეფასებული. გამოიყენება ისეთი მიდგომა, როდესაც ფაქტორებს სუბიექტური ალბათობები მიეწერება ექსპერტების მიერ. სწორედ ასეთი ამოცანებია განხილული მერიგოს კვლევებში POWA-ს გამოყენებებზე განხილულ მაგალითებში, სადაც პირდაპირ ანიჭებენ სუბიექტურ ალბათობებს. როგორც სუბიექტური განუზღვრელობის წამყვანი მკვლევარები იაგერი, ფულერი და სხვა ადასტურებენ, ბუნებრივი იქნებოდა სუბიექტურ ალბათობათა ნაცვლად გამოყენებული იქნას შესაძლებობითი ხარისხები ფაქტორების განხორციელების ხარისხებისთვის. პირველად შესაძლებლობითი ანალიზი ფაზი სიმრავლეებზე დაყრდნობით წარმოადგინა ზადემ, ხოლო შემდეგი განვითარება ჰპოვა დუბუას და პრადეს შრომებში და დღეს მის გამოყენებას სუბიექტურ ინფორმაციულ ანალიზში დიდი ადგილი უკავია.

შესაძლებლობითი განაწილება წარმოშობს შესაძლებლობით ზომას. Pos(A) რომელიც განიმარტება $\pi : S \to [0,1]$ შესაძლებლობითი განაწილებით: $Pos(A) = \max_{s \in A} \pi(s)$. განვმარტოთ S_m, როგორც ყველა გადანაცვლების სიმრავლე

$\{1, 2, ..., m\}$ და ასევე $\{P_\sigma\}_{\sigma \in S_m}$, როგორც Pos - შესაძლებლობითი ზომის ასოცირებული ალბათობების კლასი (Sirbiladze, 2012). არსებობს კავშირი (π_i)-სა და $\{P_\sigma\}_{\sigma \in S_m} : \forall \sigma \in S_m$ -ს შორის:

$$P_\sigma\left(s_{\sigma(i)}\right) = \max_{\nu=\overline{1,i}} \pi(s_{\sigma(\nu)}) - \max_{\nu=\overline{1,i-1}} \pi(s_{\sigma(\nu)}),$$

თითოეულისათვის სრულდება პირობა $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(m)) \in S_m$, $\{P_\sigma\}_{\sigma \in S_m}$ ასოცირებული ალბათობებია.

განვმარტოთ დეტერმინისტული საშუალო აგრეგირების ფუნქცია $M : R^k \Rightarrow R \ (k = m!)$.

ასოცირებული შესაძლებლობითი OWA ოპერატორი (Sirbiladze, Badagadze, Sirbiladze, Tsulaia, 2012; 2014) m განზომილებით არის მიმართება $AsFPOWA : R^m \Rightarrow R$, სადაც W არის ასოცირებული წონითი m განზომილებიანი ვექტორი, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $w_j \in (0,1)$, $(j = 1,2,...m)$; $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$ და ზოგიერთი შესაძლო ზომა $Pos : 2^S \Rightarrow [0,1]$, რითაც მიიღება შემდეგი ფორმულა (Sirbiladze, Tsulaia, 2014; Sirbiladze, Badagadze, Tsulaia, 2016):

$$AsFPOWA(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_m) = \beta \cdot \sum_{j=1}^{m} w_j \widetilde{b}_j + (1-\beta) M\left(E_{P_{\sigma_1}}(\widetilde{a}), E_{P_{\sigma_2}}(\widetilde{a}), ..., E_{P_{\sigma_k}}(\widetilde{a})\right) \qquad (1.4.4.7.1)$$

სადაც $\widetilde{b}_j$ არის j-ური უდიდესი ელემენტი ერთობლიობაში $\{\widetilde{a}_i\}, i = 1, ..., m$; $E_{P_{\sigma_i}}(\widetilde{a})$ არის $\widetilde{a}$-ს მათემატიკური მოლოდინი, რომლის მიმართებაც ასოცირდება ალბათობათა P_{σ_i} კლასთან.

ჩვენ განვიხილავთ AsPOWA ოპერატორებს კონკრეტული ფუნქციებისთვის სხვადასხვა M -თვის (Sirbiladze, Badagadze, Tsulaia, Varshanidze, 2015): AsFPOWAmin, თუ M=Min; AsFPOWAmax, თუ M=Max; AsFPOWAmean, თუ M=Mean.

1.4.4.8. UIOWA ოპერატორი

UIOWA (The Uncertain Induced OWA) ოპერატორი შემუშავებული იქნა ქსიუს მიერ (2006). იგი წარმოადგენს OWA ოპერატორის განზოგადოებას (Beliakov, 2007; Merigo, 2007; Yager, 1988; 1993), რომელიც იყენებს უმნიშვნელოვანეს თვისებებს ორი

ყველაზე ცნობილი აგრეგირების ოპერატორებისა. ესენია: The Induced OWA (Yager, Filev, 1999) და The Uncertain OWA (Xu, Da, 2003) ოპერატორები. იგი იყენებს ინტერვალურ რიცხვებს განუზღვრელი ინფორმაციის წარმოსადგენად და პროცესის მოსაწესრიგებლად (დასალაგებლად), რაც ეფუძნება დამაჯერებლობის ცვლადების დალაგებადობას. ეს უკანასკნელი შეიძლება შემდეგნაირად განისაზღვროს:

განსაზღვრება 1.4.4.8.1. დავუშვათ Ω არის ინტერვალური რიცხვების სიმრავლე. UIOWA ოპერატორი n განზომილებიან სივრცეზე არის ასახვა $UIOWA:\Omega^n \to \Omega$, რომელსაც გააჩნია ასოცირებული წონითი ვექტორი W n განზომილებიან სივრცეზე ისეთი, რომ $w_j \in [0,1]$ და $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, მაშინ

$$UIOWA\left(\langle u_1, \tilde{a}_1 \rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n \rangle\right) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j . \tag{1.4.4.8.1}$$

სადაც b_j არის UIOWA-ს $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ წყვილის $\tilde{a}_i$ სიდიდე, რომელსაც გააჩნია j–ური უდიდესი u_i, ხოლო u_i არის მოწესრიგებული დამაჯერებლობის ცვლადი და $\tilde{a}_i$ არიან ინტერვალური რიცხვები.

1.4.4.9. UIHA ოპერატორი

განუზღვრელი დამაჯერებლობის ჰიბრიდული გასაშუალოების ოპერატორი (The uncertain induced hybrid averaging operator) წარმოადგენს ჰიბრიდული საშუალოს (hybrid averaging) (Xu, 2003; 2006) განზოგადოებას, რომელიც იყენებს წონით საშუალოს (weighted average - WA) და OWA ოპერატორს ერთდროულად. ის ასევე იყენებს ინტერვალურ რიცხვებს განუზღვრელი ინფორმაციის წარმოსადგენად და პროცესის მოსაწესრიგებლად (დასალაგებლად), რაც ეფუძნება დამაჯერებლობის ცვლადების დალაგებადობას. იგი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

განსაზღვრება 1.4.4.9.1. დავუშვათ Ω არის ინტერვალური რიცხვების სიმრავლე. UIHA ოპერატორი n განზომილებიან სივრცეზე არის ასახვა $UIHA:\Omega^n \to \Omega$, რომელსაც გააჩნია ასოცირებული წონითი ვექტორი W n განზომილებიან სივრცეზე ისეთი, რომ $w_j \in [0,1]$ და $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, მაშინ

$$UIHA(\langle u_1, \tilde{a}_1 \rangle, ..., \langle u_n, \tilde{a}_n \rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j . \qquad (1.4.4.9.1)$$

სადაც b_j არის UIHA-ს $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ წყვილის $\tilde{a}_i$ ($\tilde{a} = n\omega_i \tilde{a}_i$, $i = 1,2,..., n$) სიდიდე, რომელსაც გააჩნია j–ური უდიდესი u_i, ხოლო u_i არის მოწესრიგებული დამაჯერებლობის ცვლადი, $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_3)^T$ არის $\tilde{a}_i$–ის წონითი ვექტორი ($\omega_i \in [0,1]$ და წონების ჯამი 1–ის ტოლია) და $\tilde{a}_i$ არიან ინტერვალური რიცხვები.

1.4.5. განუზღვრელ გარემოში გადაწყვეტილების მიღების ერთი მიდგომა დაფუძნებული დემპსტერ–შეიფერის თეორიისა და აგრეგირების ოპერატორების გამოყენებაზე

კონკრეტული ამოცანის ფორმულირებამდე მოკლედ შევეხოთ რამდენიმე ძირითად ცნებას ინტერვალური რიცხვების, კონკრეტული UIOWA (იხ. განსაზღვრება 1.4.4.8.1) და UIHA (იხ. განსაზღვრება 1.4.4.9.1) ოპერატორების და Dempster-Shafer (D-S)–ის თეორიის შესახებ (იხილეთ თავი 1.3.2).

ინტერვალური რიცხვი არის საკმაოდ ხელსაყრელი და მარტივი ტექნიკა განუზღვრელობის წარმოსადგენად. ლიტერატურაში ჩვენ ვპოულობთ ინტერვალური რიცხვების სხვადასხვა ტიპს. მაგალითად, თუ ჩვენ ვღებულობთ ოთხეულის კორტეჟს 4–tuple (a_1, a_2, a_3, a_4) ე.წ. კვადრუპლეტი (quadruplet), ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ეს, როგორც a_1 და a_4 წარმოადგენენ ინტერვალური რიცხვის მინიმუმს და მაქსიმუმს, და a_2 და a_3, ინტერვალს უმაღლესი ალბათობით და შესაძლებლობით, დამოკიდებული გამოყენებაზე, რაც გვინდა, რომ მივანიჭოთ ინტერვალურ რიცხვს. შევნიშნოთ, რომ $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$. თუ , $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ მაშინ ინტერვალური რიცხვი არის ზუსტი რიცხვი და თუ $a_2 = a_3$, მაშინ ეს არის 3–tuple ე.წ. ტრიპლეტი. ორ A და B ტრიპლეტზე განმარტებულია შემდეგი ოპერაციები:

$A + B = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$A - B = (a_1 - b_3,\ a_2 - b_2, a_3 - b_1)$

$A \times k = (k \times a_1,\ k \times a_2, k \times a_3)$, სადაც $k > 0$.

დემპსტერ–შეიფერის მტკიცებათა თეორია (Dempster, 1967; Shafer, 1976) უზრუნველყოფს სტრუქტურის გაერთიანებას განუზღვრელობის წარმოსადგენად რამდენადაც, მას შეუძლია ჩართოს რისკების შემთხვევები და არ ცოდნა, როგორც განსაკუთრებული შემთხვევა.

გავიხსენოთ, რომ დემპსტერ–შეიფერის დასაჯერობის სტრუქტურა (D-S Belief Structure) (იხ. თავი 1.3.2) განსაზღვრული X სივრცეზე, შედგება X –ის n არაცარიელი ქვესიმრავლეების კოლექციისგან, B_j ნებისმიერი $j = 1,2,\ .n$ –თვის იწოდება ფოკალურ ელემენტად და ასახვა m – საბაზო ალბათური განაწილება (Basic Probability Assignment) განსაზღვრული როგორც: $m : 2^X \to [0,1]$ ისე, რომ :

1) $m(B_j) \in [0,1]$;

2) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1$;

3) $m(A) = 0,\ \forall A \neq B_j$.

1.4.5.1. UIOWA და UIHA ოპერატორები გადაწყვეტილების მიღების პროცესში დემპსერ-შეიფერის (D-S) თეორიის გამოყენებით

გადაწყვეტილები მიღების ახალი მიდგომა D-S თეორიის მიხედვით შესაძლებელია განუზღვრელი დასაჯერებლობის აგრეგირების ოპერატორის გამოყენებით. მთავარი უპირატესობა ამ ტიპის აგრეგირების ოპერატორის გამოყენებისა განუზღვრელი ინფორმაციის გადაწყვეტის და აგრეგირების ოპერატორების გამოყენების (ისინი წარმოადგენენ აგრეგირების ოპერატორების პარამეტრიზებულ ოჯახს მინიმუმსა და მაქსიმუმს შორის) და დასაჯერებლობის ცვლადების გამოყენებით არგუმენტების გადალაგებისას ზოგადი ფორმულირების გამოყენების შესაძლებლობაშია. უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ამოცანაში ჩვენ ყურადღებას ვამახვილებთ UIOWA და UIHA ოპერატორებზე, მაგრამ შესაძლებელია განვიხილოთ სხვა ტიპები განუზღვრელი დამაჯერებლობის აგრეგირების ოპერატორებისა.

მოტივაცია ინტერვალური რიცხვების გამოყენებისთვის ჩნდება, რადგან ზოგჯერ ინფორმაცია მიუწვდომელია, ცხადი არ არის და აუცილებელია შევაფასოთ იგი სხვა მიდგომებით, როგორიცაა ინტერვალური რიცხვების გამოყენება. ასევე ინფორმაცია

განუზღვრელია და რთულია მისი საშუალებით გადაწყვეტილების მიღება, სულ მცირე ჩვენ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ საუკეთესო და უარესი სცენარები. გადაწყვეტილების მიღების პროცესი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

დავუშვათ ჩვენ გვაქვს გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა, რომელშიც ჩვენ გვაქვს ალტერნატივების კოლექცია $\{A_1, A_2, ..., A_q\}$ სისტემის მდომარეობებით $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$. $\tilde{a}_{ih}$ არის განუზღვრელობის ღირებულება, მოცემული ინტერვალური რიცხვების ფორმით, გადაწყვეტილების მიმღები პირისთვის (DM) თუ ის ირჩევს A_i ალტერნატივას და S_h სისტემის მდგომარეობის შემთხვევაში. სისტემის მდგომარეობის შესახებ ცოდნა წარმოდგენილია დასაჯერობის სტრუქტურის ტერმინებში m ფოკალური ელემენტებით $B_1, B_2, .., B_r$ და ასოცირებულია თითოეული ფოკალური ელემენტისთვის წონა $m(B_k)$.

პრობლემის მიზანი მდგომარეობს იმაში, რომ შევარჩიოთ ალტერნატივა, რომელიც საუკეთესო შედეგს აძლევს გადაწყვეტილების მიმღებ პირს. ამისათვის საჭიროა შესრულდეს შემდეგი ბიჯები:

ბიჯი 1: გამოვთვალოთ განუზღვრელი ღირებულებათა მატრიცა.

ბიჯი 2: გამოვთვალოთ დასაჯერობის ფუნქცია m ბუნებრივი მდგომარეობების შესახებ.

ბიჯი 3: გამოვთვალოთ წონები კოლექცია w, რომლებიც გამოიყენება UIOWA აგრეგირებისას თითოეული სხვადასხვა კარდინალობის ფოკალური ელემენტისთვის. უნდა აღვნიშნოთ, რომ შესაძლებელია სხვადასხვა მეთოდების გამოყენება, რომლებიც ეყრდნობა გადაწყვეტილების მიმღები პირების ინტერესებს (Merigo, 2007; Yager, 1988; 1993; 2007; Yager & Filev, 1994).

ბიჯი 4: განვსაზღვროთ განუზღვრელი ღირებულებათა კოლექცია M_{ik}, თუ ჩვენ ვირჩევთ A_i ალტერნატივას და B_k ფოკალურ ელემენტს ნებისმიერი i და k სიდიდეებისთვის. მაშასადამე, $M_{ik} = \{a_{ih} \mid S_h \in B_k\}$.

ბიჯი 5: გამოვთვალოთ განუზღვრელი აგრეგირებული ღირებულება $V_{ik} = UIOWA(M_{ik})$ ფორმულა (1.4.4.8.1)–ის გამოყენებით ნებისმიერი i და k სიდიდეებისთვის.

ბიჯი 6: თითოეული ალტერნატივისთვის გამოვთვალოთ განზოგადოებული მოსალოდნელი სიდიდე C_i, სადაც:

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik} m(B_k) \tag{1.4.5.1.1}$$

ბიჯი 7: ამოვარჩიოთ ალტერნატივა უდიდესი C_i–ით როგორც ოპტიმალური.

ზოგიერთ სიტუაციაში, გადაწყვეტილების მიმღები პირს შეუძლია უპირატესობა მიანიჭოს სხვა განუზღვრელი აგრეგირების ოპერატორის გამოყენებას როგორიცაა UIHA ოპერატორი. ამ ოპერატორის მთავარი უპირატესობა მდგომარეობს იმაში, რომ ის იყენებს UWA–ს და UIOWA–ს მახასიათებლებს იმავე აგრეგირებისას. თუ ჩვენ წარმოვადგენთ ამ ოპერატორს გადაწყვეტილების მიღებისას D-S თეორიასთან ერთად, ჩვენ ვართ უზრუნველყოფთ სტრუქტურის გაერთიანებას, რომელიც მოიცავს იმავე მოსალოდნელობის ფორმულირებას.

აგრეგირების აღნიშნული ტიპის გამოსაყებლად D-S სტრუქტურაში, ჩვენ ვთვლით, რომ ახლა უკვე ბიჯი 3–ში, როდესაც ხდება წონების დათვლა და რომლებიც გამოიყენება აგრეგირებისას, ჩვენ ვიყენებთ ორ წონით ვექტორს, რადგან ჩვენ ვრთავთ UWA და UIOWA ოპერატორებს იმავე საკითხში. ბიჯი 5–ში, როდესაც ხდება განუზღვრელი აგრეგირებული ღირებულებების გამოთვლა, ჩვენ ვიყენებთ UIHA ოპერატორს UIOWA ოპერატორის ნაცვლად ფორმულა (1.4.4.8.1)–ის გამოყენებით.

ჩვენ შეგვიძლია განვავითაროთ UIOWA და UIHA ოპერატორების სხვადასხვა ოჯახი. მაგალითად, შესაძლებელია მივიღოთ UA და UWA. UA–ს ვღებულობთ UIOWA–სგან, როცა $w_j = \frac{1}{n}$, $\forall \tilde{a}_i$–თვის და UWA, თუ $u_i > u_{i+1}$, $\forall a_i$–თვის. UIOWA მიიღება, როცა u_i სიდიდეების დალაგებული პოზიცია იგივეა რაც j. შევნიშნოთ, რომ შეგვეძლია გამოვიყენოთ სხვა ოჯახები, რომლებიც განხილულია მერიგოს და იაგერის მიერ (Merigo, 2007; Yager, 1993).

1.4.5.2. საილუსტრაციო მაგალითი

მიმდინარე მაგალითში ჩვენ გვსურს ავამუშავოთ ახალი მიდგომა, რომელიც ეხება გადაწყვეტილების მიღებას ფინანსური სტრატეგიის არჩევისას. ჩვენ გამოვიყენებით შემდეგ აგრეგირების ოპერატორებს: UA, UWA, UOWA, UIOWA და UIHA.

დავუშვათ კომპანია გეგმავს მომავალი წლისათვის თავის ფინანსურ სტრატეგიას და ისინი განიხილავენ 4 შესაძლო ფინანსურ სტატეგიას. ესენია:

$A_1 =$ ფინანსური სტრატეგია 1;

$A_2 =$ ფინანსური სტრატეგია 2;

$A_3 =$ ფინანსური სტრატეგია 3;

$A_4 =$ ფინანსური სტრატეგია 4;

ზემოთ ჩამოთვლილი ფინანსური სტრატეგიების შესაფასებლად კომპანია მიმართავს ექსპერტების ჯგუფს. ისინი ფიქრობენ, რომ გასაღები ფაქტორია – კომპანიის ეკონომიკური სიტუაცია მომდევნო ერთი წლის განმავლობაში. გულითადი ანალიზის შემდეგ ექსპერტებმა განიხილეს ხუთი შესაძლო სიტუაცია, რომელიც შეიძლება განვითარდეს მომავალში. ესენია:

$S_1 =$ ძალიან ცუდი;

$S_2 =$ ცუდი;

$S_3 =$ ნორმალური;

$S_4 =$ კარგი;

$S_5 =$ ძალიან კარგი;

შემდეგ, განუზღვრელი სიტუაციების გათვალისწინებით, რომელიც შეიძლება მოხდეს, ექსპერტები ადგენენ განუზღვრელი ღირებულებათა მატრიცას. რადგან კომპანიის სამომავლო მდგომარეობის და მოგების შესახებ ინფორმაცია საკმაოდ არაზუსტია, ექსპერტები იყენებენ ინტერვალურ რიცხვებს. შედეგი წარმოდგენილი ცხრილი 1.4.5.2.1–ში.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(10, 20, 30)	(40, 50, 60)	(70, 80, 90)	(40, 50, 60)	(50, 60, 70)
A_2	(50, 60, 70)	(30, 40, 50)	(20, 30, 40)	(60, 70, 80)	(40, 50, 60)
A_3	(70, 80, 90)	(40, 50, 60)	(30, 40, 50)	(30, 40, 50)	(40, 50, 60)
A_4	(30, 40, 50)	(50, 60, 70)	(20, 30, 40)	(50, 60, 70)	(60, 70, 80)

ცხრილი 1.4.5.2.1. განუზღვრელ ღირებულებათა მატრიცა.

ინფორმაციის დეტალური ანალიზის შემდეგ, ექსპერტებმა მიიღეს ზოგიერთი მოსალოდნელი ინფორმაცია ბუნებრივი მდგომარეობების შესახებ, რომლებიც განვითარდება მომავალში. ეს ინფორმაცია წარმოდგენილია შემდეგი დასაჯერობის სტრუქტურით ბუნებრივი მდგომარეობების შესახებ:

$B_1 = \{S_2, S_3, S_4\} = 0.3;\ B_2 = \{S_1, S_2, S_5\} = 0.3;\ B_3 = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} = 0.4;$

კომპანიის შემაჯამებელი ხასიათი ძალიან რთულია, რადგან ის მოიცავს დირექტორთა საბჭოს სხვადასხვა წევრების მოსაზრებებს. ამიტომ ექსპერტები იყენებენ დალაგებულ დასაჯერობის ცვლადებს ორგანიზაციის ზოგადი ხასიათის შესაფასებლად (ანალიზისათვის). შედეგები ნაჩვენებია ცხრილი 1.4.5.2.2–ში.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	30	22	16	35	26
A_2	12	18	24	20	30
A_3	16	11	21	33	25
A_4	30	26	12	18	24

ცხრილი 1.4.5.2.2. დალაგებული დასაჯერობის ცვლადები.

ექსპერტები იძლევიან შემდეგ წონით ვექტორებს UWA და UIOWA ოპერატორებისთვის:

$W_3 = (0.3, 0.3, 0.4);\ W_4 = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3);\ W_5 = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3);$

ამ ინფორმაციის ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ აგრეგირებული ღირებულებები, რომელიც ნაჩვენებია ცხრილი 1.4.5.2.3–ში, ხოლო როგორც კი მივიღებთ აგრეგირების შედეგებს, ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ განუზღვრელი განზოგადოებული მათემატიკური მოლოდინი. შედეგები ნაჩვენებია ცხრილი 1.4.5.2.4–ში.

	UA	*UWA*	*UOWA*	*UIOWA*	*UIHA*
V_{11}	(50, 60, 70)	(49, 59, 69)	(49, 59, 69)	(52, 62, 72)	(52, 62, 72)
V_{12}	(33.3, 43.3, 53.3)	(35, 45, 55)	(31, 41, 51)	(34, 44, 54)	(40, 50, 60)
V_{13}	(40, 50, 60)	(43, 53, 63)	(37, 47, 57)	(37, 47, 57)	(42, 51, 60)
V_{21}	(36.6, 46.6, 56.6)	(39, 49, 59)	(35, 45, 55)	(36, 46, 56)	(36, 46, 56)
V_{22}	(40, 50, 60)	(40, 50, 60)	(39, 49, 59)	(41, 51, 61)	(37, 46.5, 56)
V_{23}	(40, 50, 60)	(40, 50, 60)	(37, 47, 57)	(37, 47, 57)	(32.5, 41, 49.5)
V_{31}	(33.3, 43.3, 53.3)	(33, 43, 53)	(33, 43, 53)	(34, 44, 54)	(34, 44, 54)
V_{32}	(50, 60, 70)	(49, 59, 69)	(49, 59, 69)	(49, 59, 69)	(44.5, 54.5, 64.5)
V_{33}	(42.5, 52.5, 62.5)	(40, 50, 60)	(40, 50, 60)	(40, 50, 60)	(34.5, 43, 51.5)
V_{41}	(40, 50, 60)	(41, 51, 61)	(38, 48, 58)	(38, 48, 58)	(38, 48, 58)
V_{42}	(46.6, 56.6, 66.6)	(48, 58, 68)	(45, 55, 65)	(48, 58, 68)	(55.5, 66, 76.5)
V_{43}	(37.5, 47.5, 57.5)	(37, 47, 57)	(35, 45, 55)	(35, 45, 55)	(34, 43, 52)

ცხრილი 1.4.5.2.3. განუზღვრელი აგრეგირებული ღირებულებები.

	UA	*UWA*	*UOWA*	*UIOWA*	*UIHA*
A_1	(41, 51, 61)	(42.4, 52.4, 62.4)	(38.8, 48.8, 58.8)	(40.6, 50.6, 60.6)	(44.4, 54, 63.6)
A_2	(39, 49, 59)	(39.7, 49.7, 59.7)	(37, 47, 57)	(37.9, 47.9, 57.9)	(34.9, 44.15, 53.4)
A_3	(42, 52, 62)	(40.6, 50.6, 60.6)	(40.6, 50.6, 60.6)	(40.9, 50.9, 60.9)	(37.35, 46.75, 56.15)
A_4	(41, 51, 61)	(41.5, 51.5, 61.5)	(38.9, 48.9, 58.9)	(39.8, 49.8, 59.8)	(41.65, 51.4, 61.15)

ცხრილი 1.4.5.2.4. განუზღვრელი განზოგადოებული მათემატიკური მოლოდინი.

როგორც ჩვენ ვხედავთ, განუზღვრელი აგრეგირების ოპერატორის გამოყენებაზე დაყრდნობით, შედეგები და გადაწყვეტილებები შეიძლება იყოს განსხვავებული.

UA , UOWA და UIOWA ოპერატორებისთვის ოპტიმალური არჩევანია A_3 , ხოლო UWA და UIHA ოპერატორებისთვის საუკეთესო შედეგია A_1.

თავი II. ასოცირებული ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი წონითი ოპერატორები ურთიერთმოქმედი ატრიბუტების მქონე გადაწყვეტილების მიღების სისტემებში.

ალბათური აგრეგირების ოპერატორები, როგორც სტოქასტური აგრეგირების ინსტრუმენტები გამოიყენება გადაწყვეტილების მიღების უამრავ მოდელში, განსაკუთრებით კი მრავალატრიბუტული/მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების (MCDM/MADM – Multi Criteria/Attribute Decision Making) ამოცანებში (Merigó, 2009; 2011; 2012; 2014, Sirbiladze, 2003; 2011; 2014; 2015). სტოქასტური აგრეგაციის პროცესი ემყარება დაშვებას, რომ MCDM/MADM-ის მოდელის მდგომარეობები (კრიტერიუმები, ფაქტორები, ატრიბუტები) დამოუკიდებელია და აგრეგირების ალბათურ ოპერატორებს აქვთ წრფივი ქცევა. ისინი შემუშავებულია ადიციური ზომების გამოყენებით, რომლებიც წარმოდგენილია დამოუკიდებლობის აქსიომებით (the axioms of independence) (Wakker, 1999). ამასთან, MCDM/MADM–ის რეალურ მოდელებში ხშირად არსებობს სისტემის მდგომარეობების კომბინაციებს შორის *ურთიერთდამოკიდებულების ან ურთიერთქმედების გარკვეული ხარისხი* (Grabisch, 1995; 1996; Roubens, 1996). გადაწყვეტილების მიმღებ პირებს (DMP – Decision Making Persons), რომლებიც მოწვეულნი არიან გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის გადასაჭრელად, გააჩნიათ თითქმის ერთნაირი ცოდნა და უპირატესობები. DMP-ების *სუბიექტური უპირატესობები ჩვეულებრივ არაწრფივია.* ამრიგად, არ არის დაკმაყოფილებული არც მდგომარეობებს შორის დამოუკიდებლობა და არც DMP-ების უპირატესობათა დამოუკიდებლობა.

სუჯენომ (Sugeno, 1974) შემოიღო არაადიციური, მაგრამ მონოტონური (ფაზი) ზომის (non-additive (fuzzy) measure) განმარტება, რომელიც ნაცვლად ადიციურობისა მოითხოვს მხოლოდ მონოტონურობას. ეს *<u>განმარტება აღმოჩნდა ყველაზე ეფექტური ინსტრუმენტი ურთიერთქმედების ფენომენის მოდელირებისთვის</u>* (Grabisch, 1996; Kojadinovic, 2002) *და გადაწყვეტილების მიღების ამოცანების გადასაჭრელად, როდესაც ალბათური ზომა შეცვლილია ფაზი ზომით* (Grabisch, 1995; 1997; 2000; Pap, 1995). (Liginlal, 2006)-ში განხილულია გადაწყვეტილების მიმღები პირების ქცევა ზოგიერთი MCDM/MADM–ის ამოცანებში. ფაზი ზომის განსაზღვრებისთვის ან იდენტიფიცირებისთვის წამოდგენილია რამდენიმე მეთოდი. მაგალითად, წრფივი

მეთოდები (Linear Methods) (Marichal, 1998), კვადრატული მეთოდები (Quadratic Methods) (Grabisch, 1996), სუჯენოს λ-ადიციურ ზომებზე დაფუძნებული მეთოდები (Sogeno's λ-additive Measures based Methods) (Sirbiladze & Gachechiladze, 2005), ევრისტიკაზე დაფუძნებული მეთოდები (Heuristic based Methods) (Grabisch, 1995), ევოლუციური ალგორითმები (Evolutionary Algorithms) (Wang, 1998) და სხვა. (Grabisch, 2008)-ში ყურადღება გამახვილებულია ფაზი ზომების იდენტიფიკაციის ზოგიერთ მეთოდში შოკეს ინტეგრალის (The Choquet Integral) გამოყენებაზე. (Wu, 2010)–ში გადაჭრილია 2 – არადიციური ფაზი ზომის იდენტიფიკაციის საკითხი. ზოგიერთი მეთოდის შესახებ ბოლო პერიოდში გამოქვეყნებული პუბლიკაციებში, რომლებიც შემოთავაზებულია სირთულის შესამცირებლად, ფაზი ზომის ზოგიერთი მნიშვნელობის იდენტიფიკაციის ამოცანებია განხილულია (Krishnan, 2015)–ში.

ამ თავში მოკლედ აღწერილია ინტუიციონისტური ფაზი სიმრავლეების კონცეფცია და ინტუიციონისტური ფაზი აგრეგირების ოპერატორების გავრცობები შოკეს ინტეგრალის აგრეგირებასთან მიმართებაში (Choquet, 1954) ინტუიციონისტური ფაზი გარემოსთვის. ინტუიციონისტური ფაზი სიმრავლეს (IFS – Intuitionistic Fuzzy Set) ცნება შემოიღო ათანასოვმა (Atanassov, 1986), როგორც ზადეს ფაზი სიმრავლის (FS– Fuzzy Set) განზოგადება (Zadeh, 1965). იმის გამო, რომ IFS–ის თითოეულ ელემენტს ენიჭება მიკუთვნების ხარისხი (Membership Degree), არა–მიკუთვნების ხარისხი (non-Membership Degree) და მერყეობის ხარისხი (Hesitancy Degree), IFS უფრო ძლიერი ინსტრუმენტად ითვლება განუზღვრელობასთან და არაზუსტობასთან გამკლავებაში ვიდრე FS. IFS თეორია ფართოდ იქნა შესწავლილი და გამოყენებული სხვადასხვა სფეროებში (Atanassov, 1999; Xu, 2008). IFS– ებზე ზოგიერთი ძირითადი ოპერაცია განისაზღვრება ათანასოვის (Atanassov, 1986; De, 2000) და სხვების მიერ. ქსიუმ და იაგერმა (Xu, 2006) წარმოადგინეს რამდენიმე გეომეტრიული, ხოლო ქსიუმ (Xu, 2007) განსაზღვრა ზოგიერთი არითმეტიკული ინტუიციონისტური ფაზი აგრეგირების ოპერატორი.

ყველა ზემოხსენებული და სხვა ინტუიციონალური ფაზი აგრეგირების ოპერატორი განიხილავს მხოლოდ სიტუაციებს, როდესაც IFS– ის ყველა ელემენტი დამოუკიდებელია, ანუ ისინი მხოლოდ ცალკეული ელემენტების მნიშვნელობას

განიხილავენ. ამის მიუხედავად, მრავალ პრაქტიკულ ამოცანაში, კრიტერიუმებს შორის არსებობს კორელაცია ან ურთიერთქმედება ფაზი მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების სისტემების განხილვისას (Grabisch, 1995). ტანმა და ჩენმა (Tan, 2010)–ში შექმნეს ალგორითმი მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღებისათვის, რომელიც დაფუძნებული იყო ინტუიციონისტურ ფაზი შოკეს ინტეგრალურ ოპერატორზე. ქსიუმ (Xu, 2010)–ში გამოიყენა შოკეს ინტეგრალი რამდენიმე ინტუიციონისტური ფაზი აგრეგირების ოპერატორის განმარტებაში. ქსიამ და ქსიუმ (Xia, 2013)–ში წარმოადგინეს შოკეს ინტეგრალის ახალი გავრცობა - ინტუიციონისტური მულტიპლიკაციური შოკეს დალაგებული გასაშუალოების ოპერატორი (Intuitionistic Multiplicative Choquet Ordered Averaging Operator), რომელიც ასახავს ინტუიციონისტურ მულტიპლიკაციურ უპირატესობათა ინფორმაციის კორელაციებს გადაწყვეტილების მიღების პროცედურაში. ვუმ და სხვებმა (Wu, 2013) დაწვრილებით განიხილეს ინტუიციონისტური ფაზი–შეფასებების შოკეს ინტეგრალის (Intuitionistic Fuzzy Valued Choquet Integral) აგრეგირების თვისებები. ელემენტების მნიშვნელობის ან მათი დალაგებული პოზიციის გათვალისწინებით, ეს ოპერატორები ასევე ასახავენ კორელაციებს ან ურთიერთქმედებას კრიტერიუმების ზოგიერთ კომბინაციას შორის.

მიუხედავად იმისა რომ, შოკეს აგრეგირების ოპერატორზე დაფუძნებული უამრავი აგრეგირების ოპერატორია აგებული ინტუიციონისტურ ფაზი გარემოში, ჯერ კიდევ არსებობს საკითხი, რომლის აღნიშვნაც აუცილებელია: შოკეს ინტეგრალი არ ასახავს საერთო ურთიერთქმედებას ბუნებრივი მდგომარეობების (კრიტერიუმების) _ყველა კომბინაციას შორის._ ამრიგად, საჭიროებას წარმოადგენდა ალბათურ შეწონილ გასაშუალოების ოპერატორზე (*Probability Weighted Averaging Operator*) (Merigó, 2009) დაფუძნებული ახალი ოპერატორების შექმნა ინტუიციონისტურ ფაზი გარემოში, როდესაც ალბათობები შეიცვალა ფაზი ზომის ასოცირებული ალბათობებით. აგებულ ოპერატორებში კი ასახული იქნებოდა საერთო _ურთიერთქმედება ბუნებრივი მდგომარეობების ყველა კომბინაციას_ შორის.

პირველ ნაწილში მოკლედ განხილულია ალბათური შეწონილი გასაშუალების და გეომეტრიული აგრეგირების ოპერატორების უახლესი განზოგადოებები

ინტუიციონისტური ფაზი არგუმენტებისთვის. ასევე წარმოდგენილია ფაზი ზომების ასოცირებული ალბათობების ძირითად თვისებები და მათი კავშირი სასრულ შოკეს ინტეგრალთან. მეორე ნაწილში მოცემულია ასოცირებული ალბათობის ინტუიციონისტური ფაზი შეწონილი საშუალო (Associated Probability Intuitionistic Fuzzy Weighted Averaging Operator) და გეომეტრიული ოპერატორები (Geometric Operator). განხილულია აგებული ინტუიციონისტური ფაზი ოპერატორების ზოგიერთი თვისება. ნაჩვენებია შეწყვილებული კავშირი აგებულ ოპერატორებს შორის. მესამე ნაწილში აგებული ოპერატორები გამოიყენება ბიზნეს–წამოწყების ტიპის ფაზი გადაწყვეტილების მიღების ამოცანაში. მე-4 ნაწილში წარმოდგენილია ამ თავში წარმოდგენილი ძირითადი შედეგების შემაჯამებელი დასკვნები.

2.1. ძირითადი ცნებები და განსაზღვრებები

სტოქასტურ ან დეტერმინისტულ გარემოში ჩვეულებრივ გამოიყენება ალბათური გასაშუალოების ან გეომეტრიული ოპერატორები ან მათი კომბინაციები ბუნებრივი მდგომარეობების შესახებ ასოცირებული წონებით. მერიგომ და სხვებმა (Merigó, 2009, 2011, 2014) შეიმუშავეს ალბათური შეწონილი საშუალო და გეომეტრიული ოპერატორები, რომლებიც აერთიანებენ ალბათობას და შეწონილ საშუალო მაჩვენებელს, თითოეული კონცეფციის მნიშვნელობის ხარისხის გათვალისწინებით.

განსაზღვრება 2.1.1. დავუშვათ a წარმოადგენს რაიმე შემთხვევით ცვლადს: $a: S \Rightarrow R,\ (a=(a_1,\ldots,a_n))$. ალბათური შეწონილი საშუალო (PWA – Probability Weighted Averaging) ოპერატორი ალბათური განაწილებით $P=\{\,p_i\,\}_{i=1}^{n},\ p_i \equiv prob(a_i)$, $0<p_i<1,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ და აგრეგირების წონითი ვექტორით $w=(w_1,\ldots,w_n)$ ისეთი რომ , $0 \le w_j \le 1,\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ არის

$$PWA_P(a_1,\ldots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_i a_i\ , \qquad (2.1.1)$$

სადაც $\bar{p}_i=\beta p_i+(1-\beta)w_i$, $\beta\in[0;1]$ წონითი პარამეტრით.

განსაზღვრება 2.1.2. დავუშვათ a წარმოადგენს რაიმე შემთხვევით ცვლადს: $a: S \Rightarrow R,\ (a=(a_1,\ldots,a_n))$. ალბათური წონითი გეომეტრიული (PWG – Probability

Weighted Geometric) ოპერატორი ალბათური განაწილებით $P=\{p_i\}_{i=1}^n$, $p_i \equiv prob(a_i)$, $0<p_i<1$, $\sum_{i=1}^n p_i=1$, და აგრეგირების წონითი ვექტორით $w=(w_1,...,w_n)$ ისეთი რომ, $0 \le w_j \le 1$, $\sum_{j=1}^n w_j=1$ არის

$$PWG_P(a_1,...,a_n)=\prod_{i=1}^n a_i^{\bar{p}_i}, \qquad (2.1.2)$$

სადაც $\bar{p}_i=\beta p_i+(1-\beta)w_i$ შემდეგი $\beta \in [0;1]$ წონითი პარამეტრით.

განსაზღვრება 2.1.3 (Atanassov, 1986). დავუშვათ S არის ფიქსირებული ჩვეულებრივი სიმრავლე. α ინტუიციონისტური ფაზი სიმრავლე (IFS–Intuitionistic Fuzzy Set) S სიმრავლეზე განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\alpha=\{\langle s,\mu_\alpha(s),\nu_\alpha(s)\rangle / s\in S\}$, (2.1.3)

სადაც $\mu_\alpha(s)$ და $\nu_\alpha(s)$ ფუნქციები აღნიშნავენ $s\in S$ ელემენტის მიკუთვნების და არამიკუთვნების ხარისხებს α სიმრავლეში, შესაბამისად შემდეგი პირობებით:

$$0\le \mu_\alpha(s)\le 1,\ 0\le \nu_\alpha(s)\le 1,\ 0\le \mu_\alpha(s)+\nu_\alpha(s)\le 1, \qquad (2.1.4)$$

და $\pi_\alpha(s)=1-\mu_\alpha(s)-\nu_\alpha(s)$ ჩვულებრივ უწოდებენ S სიმრავლის განუსაზღვრელობის, ჰესიტანტურობის ხარისხს α სიმრავლეში. ცხადია, ჩვეულებრივი ფაზი სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც $\{s,\mu_\alpha(s),1-\mu_\alpha(s)/s\in S\}$. $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)$ წყვილს უწოდებენ ინტუიციონისტურ ფაზი სიდიდეს (IFV - Intuitionistic Fuzzy Value) და $IFVs$ – თი აღინიშნება ყველა IFV–ის სიმრავლე.

დავუშვათ L არის არაცარიელი ინტერვალების მესერი $L=\{[a;b]\ /(a,b)\in[0,1]^2,\ a\le b\}$. ნაწილობრივი დალაგების მიმართება $\le_L$ განისაზღვრება, როგორც $[a;b]\le_L [c;d] \Leftrightarrow a\le c$ და $b\le d$. ზედა და ქვედა ელემენტები შესაბამისად არიან 1_L = [1; 1] და 0_L = [0; 0]. *IFVs* ყველა ინტუიციონისტური ფაზი სიდიდეების სიმრავლისათვის წამოდგენილი ნაწილბრივი დალაგების მიმართება $\le_{L_{IFVs}}$ განისაზღვრება როგორც

$$(\mu_1,\nu_1)\le_{L_{IFVs}}(\mu_2,\nu_2)\Leftrightarrow \mu_1\le\mu_2\ and\ \nu_1\ge\nu_2. \qquad (2.1.5)$$

შესაბამისად, ზედა და ქვედა ელემენტები არიან $1_{L_{IFVs}}=(1;0)$ და $0_{L_{IFVs}}=(0;1)$.

განსაზღვრება 2.1.4 (Atanassov, 1986; Xu, 2007). ინტუიციონისტურ ფაზი სიდიდეების L_{IFVs} მესერზე განისაზღვრება შემდეგი ოპერაციები.

$\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$–თვის, სადაც $\alpha_1, \alpha_2 \in L_{IFVs}$ სამართლიანია:

1. $\alpha^c = (\nu_\alpha, \mu_\alpha)$;
2. $\alpha_1 \oplus \alpha_2 = (\mu_{\alpha_1} + \mu_{\alpha_2} - \mu_{\alpha_1} \cdot \mu_{\alpha_2}, \nu_{\alpha_1} \cdot \nu_{\alpha_2})$;
3. $\alpha_1 \otimes \alpha_2 = (\mu_{\alpha_1} \cdot \mu_{\alpha_2}, \nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2} - \nu_{\alpha_1} \cdot \nu_{\alpha_2})$;
4. $\alpha_1 \vee \alpha_2 = (\max(\mu_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_2}), \min(\nu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_2}))$; (2.1.6)
5. $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = (\min(\mu_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_2}), \max(\nu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_2}))$;
6. $\lambda \cdot \alpha = (1-(1-\mu_\alpha)^\lambda, \alpha), \ \lambda > 0$;
7. $\alpha^\lambda = (\mu_\alpha^\lambda, 1-(1-\alpha)^\lambda), \ \lambda > 0$.

როდესაც აგრეგირების ოპერატორი მოითხოვს დალაგების ოპერაციას (OWA ოპერატორში და სხვა (Beliakov, 2007)), საჭიროა სრული დალაგების ბინარული მიმართების განსაზღვრა L_{IFVs}–ზე. ჩვენს შემთხვევაში სრული დალაგების მიმართება $\leq_t$ L_{IFVs}–ზე აღინიშნება როგორც $\alpha \leq_t \beta$ ($\alpha, \beta \in IFVs$) და განიმარტება შემდეგნაირად

ა) $\alpha <_t \beta$ თუ (i) $S(\alpha) < S(\beta)$ ან (ii) $S(\alpha) = S(\beta)$ და $h(\alpha) < h(\beta)$; (2.1.7)

ბ) $\alpha =_t \beta$ თუ $S(\alpha) = S(\beta)$ და $h(\alpha) = h(\beta)$,

სადაც $S(\alpha)$ არის IFV–ის ქულა (Score): $S(\alpha) = \mu_\alpha - \nu_\alpha$ და $h(\alpha)$ IFV–ის სიზუსტე (Accuracy): $h(\alpha) = \mu_\alpha + \nu_\alpha$.

განსაზღვრება 2.1.5 (Beliakov, 2007). ფუნქცია $F : L_{IFVs}^n \to L_{IFVs}$ არის ინტუიციონისტური ფაზი აგრეგირების ოპერატორი, თუ ის არის მონოტონური $\leq_{L_{IFVs}}$ – ნაწილობრივი დალაგების არგუმენტებისთვის და აკმაყოფილებს $F(0_{L_{IFVs}}, ..., 0_{L_{IFVs}}) = 0_{L_{IFVs}}$ და $F(1_{L_{IFVs}}, ..., 1_{L_{IFVs}}) = 1_{L_{IFVs}}$ პირობებს.

განსაზღვრება 2.1.6. დავუშვათ $\alpha_1, ..., \alpha_n \in IFVs$ წარმოადგენს IFV–ების რაიმე კოლექციას, როგორც სიდიდეებს S სიმრავლეზე. განისაზღვრება შემდეგი ინტუიციონისტური ფაზი აგრეგირების ოპერატორები:

ა) ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი წონითი გასაშუალოების (P-IFWA – Probability Intuitionistic Fuzzy Weighted Averaging) ოპერატორი (Wei, 2012) არის:

$$P - IFWA_P(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \bigoplus_{i=1}^{n} (\bar{p}_i \alpha_i) = \left(1 - \prod_{i=1}^{n} (1-\mu_{\alpha_i})^{\bar{p}_i}, \prod_{i=1}^{n} (\nu_{\alpha_i})^{\bar{p}_i}\right), \tag{2.1.8}$$

სადაც $\bar{p}_i = \beta p_i + (1-\beta) w_i$ შემდეგი $\beta \in [0;1]$ წონითი პარამეტრით და $P = \{ p_i \}_{i=1}^{n}$, $p_i \equiv prob(a_i)$ არის ალბათური განაწილებით $0 < p_i < 1$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, და $w = (w_1,..., w_n)$ აგრეგირების წონითი ვექტორით ისეთი, რომ $0 \le w_j \le 1$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

ბ) ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი წონითი გეომეტრიული (P-IFWG – Probability Intuitionistic Fuzzy Weighted Geometric) ოპერატორი (Wei, 2012) არის:

$$P - IFWG_P(\alpha_1,..., \alpha_n) = \bigotimes_{i=1}^{n} (\alpha_i)^{\bar{p}_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} (\mu_{\alpha_i})^{\bar{p}_i}, 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \nu_{\alpha_i})^{\bar{p}_i} \right), \qquad (2.1.9)$$

სადაც $\bar{p}_i = \beta p_i + (1-\beta) w_i$ შემდეგი $\beta \in [0;1]$ წონითი პარამეტრით და $P = \{ p_i \}_{i=1}^{n}$, $p_i \equiv prob(a_i)$ არის ალბათური განაწილებით $0 < p_i < 1$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, და $w = (w_1,..., w_n)$ აგრეგირების წონითი ვექტორით ისეთი, რომ $0 \le w_j \le 1$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

(Wei, 2012)-ში მოცემულია ინტუიციონისტური ფაზი ოპერატორების განზოგადოებები ინტერვალებით წარმოდგენილი ინტუიციონისტური ფაზი არგუმენტებისთვის. მაგრამ, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, გადაწყვეტილების მიღების უმრავლეს ამოცანებში, ბუნებრივ მდგომარეობებზე ალბათური განაწილება უცნობია, რადგან პრიორიტეტული ობიექტური მონაცემები ალბათობის შეფასებისთვის არ არსებობს. ასეთ ექსპერიმენტებში ექსპერტის ცოდნა წარმოდგენს უნიკალურ წყაროს ფაზი განუზღვრელობის დასადგენად. როგორც ცნობილია (Denneberg, 1994; Grabisch, 1995; 1996; 1997; 2000; Sirbiladze, 2003; 2005; 2011; 2013; 2014; 2015; Sugeno, 1974) განუზღვრელობა წარმოდგენილია მონოტონური (ფაზი) ზომით. მიმდინარე ნაშრომის ერთ-ერთი მთავარი გარემოებაა განსაზღვრება 2.1.6–ში აღწერილი ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი WA და WG ოპერატორების ახალი განზოგადოებების აგება, როდესაც ალბათური ზომა შეიცვლება ფაზი ზომით და განიხილება ურთიერთქმედება ყველა ბუნებრივ ფაქტორებს შორის.

განსაზღვრება 2.1.7 (Sugeno, 1974). დავუშვათ $S = \{s_1, s_2,..., s_n\}$ არის სასრული სიმრავლე და g არის სიმრავლის ფუნქციება $g: 2^S \to [0,1]$. ჩვენ ვამბობთ, რომ g არის ფაზი ზომა S სიმრავლეზე თუ ის აკმაყოფილებს:

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad g(\varnothing)=0; \;\; g(S)=1;\\
&(ii) \quad \forall A,B\subseteq S, \quad if \;\; A\subseteq B, \;\; then\; g(A)\le g(B).
\end{aligned}
\qquad (2.1.10)
$$

S სიმრავლის ელემენტების შესაძლო დალაგება მოცემულია n ელემენტიანი სიმრავლის გადანაცვლებით, რომელიც ქმნის S_n ჯგუფს.

განსაზღვრება 2.1.8 (Campos, 1989). ალბათური ფუნქციები P_σ განისაზღვრება, როგორც

$$
\begin{aligned}
&P_\sigma\left(s_{\sigma(1)}\right)=g\left(\left\{s_{\sigma(1)}\right\}\right),....,\\
&P_\sigma\left(s_{\sigma(i)}\right)=g\left(\left\{s_{\sigma(1)},....,s_{\sigma(i)}\right\}\right)-g\left(\left\{s_{\sigma(1)},....,s_{\sigma(i-1)}\right\}\right),....,\\
&P_\sigma\left(s_{\sigma(n)}\right)=1-g\left(\left\{s_{\sigma(1)},....,s_{\sigma(n-1)}\right\}\right),\\
&g\left(\left\{s_{\sigma(0)}\right\}\right)\equiv 0
\end{aligned}
\qquad (2.1.11)
$$

თითოეული $\sigma=(\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n))\in S_n$ და ეწოდება g ფაზის ზომის <u>*ასოცირებული ალბათობა*</u> და <u>*ასოცირებული ალბათობების კლასი*</u> (APC– Associated Probability Class) - $\{P_\sigma\}_{\sigma\in Sn}$.

იმ შემთხვევაში, თუ ფაზი ზომა არის ალბათობა, ადვილია იმის დამტკიცება, რომ ყველა ასოცირებული ალბათობა ტოლია (ერთმანეთს ემთხვევა).

მტკიცებულება 2.1.1. (Campos, 1989). g ფაზი ზომა არის ალბათური ზომა $(g = p)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მასთან დაკავშირებული $n!$ ალბათობები ემთხვევა.

ფაზი ზომების დუალურობის კონცეფცია ძალიან მნიშვნელოვანია, რადგან ის საშუალებას იძლევა მივიღოთ ინფორმაციის ალტერნატიული წარმოდგენა. ფაზი ზომები g_* და g^* დუალურია თუ $g_*(A)=1-g^*(\overline{A}), \forall A\subset S$. შესაბამისად, ჩვენ განვიხილავთ ფაზი ზომას და მის დუალურ ზომას, რომელიც შეიცავს ერთსა და იმავე ინფორმაციას, მაგრამ სხვაგვარად არის კონფიგურირებული. დუალური ფაზი ზომების შემთხვევა, როდესაც სხვადასხვა ფაზი ზომები ერთსა და იმავე $n!$ ალბათობებს იძლევა, მაგრამ განსხვავებულად არის დალაგებული, ყველაზე საყურადღებო შემთხვევაა.

განსაზღვრება 2.1. 9 (Campos, 1989). ჩვენ ვამბობთ, რომ ორი განადაცვლება $\sigma,\sigma^*\in S_n$ დუალურია თუ $\sigma^*(i)=\sigma(n-i+1),\; i=1,...,n$.

მტკიცებულება 2.1.2 (Campos, 1989). აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ ორი ფაზი g_* და g^* ზომა იყოს დუალური არის ერთიდაიგივე $n!$

ასოცირებული ალბათობების წარმოდგენა დუალური გადანაცვლებისათვის ერთმანეთს ემტხვეოდეს, ანუ $P_{*\sigma} = P^{*}_{\sigma^*}$ თუ σ_* და σ^* არის დუალური, სადაც P_* და P^* ასოცირებული ალბათობებია g_* და g^* ფაზი ზომებისათვის შესაბამისად.

ფაზი ზომების განსაკუთრებით საინტერესო კლასია სუპერმოდულარული (ქვედა ტევადობა) და საბმოდულარული (ზედა ტევადობა) დუალური ფაზი ზომები (Choquet, 1954; Grabisch, 1995) - ტევადობები:

განსაზღვრება 2.1.10 (Campos, 1989). დავუშვათ (g_*, g^*) არის დუალური ფაზი ზომების წყვილი S სიმრავლეზე:

g_* წარმოადგენს ქვედა ტევადობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\forall A, B \subseteq S,\quad g_*(A \cup B) + g_*(A \cap B) \geq g_*(A) + g_*(B);$

g^* წარმოადგენს ზედა ტევადობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\forall A, B \subseteq S,\quad g^*(A \cup B) + g^*(A \cap B) \leq g^*(A) + g^*(B).$

განსაზღვრება 2.1.11 (Choquet, 1954). დავუშვათ $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ არის სისტემის მდგომარეობათა სიმრავლე, რომელზეც გვაქვს g ფაზი ზომა და ექსპერტული შეფასებების ცვლადი $a: S \Rightarrow R_0^+$ ისეთი რომ $a(s_i) \equiv a_i \geq 0,\ i = 1,2,...,n$. მაშინ აგრეგირებას

$$CA_g(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{j=1}^{n} p_j a_{i(j)}\ , \tag{2.1.12}$$

ეწოდება დისკრეტული შოკეს გასაშუალოების (CA - Choquet Averaging) ოპერატორი g ფაზი ზომასთან მიმართებაში და

$$CG_g(a_1, ..., a_n) = \prod_{j=1}^{n} a_{i(j)}^{p_j}\ . \tag{2.1.13}$$

ეწოდება დისკრეტული შოკეს გეომეტრიული (CG – Choquet Geometric) ოპერატორი g ფაზი ზომასთან მიმართებაში, სადაც $i(\cdot)$ არის ინდექსის ფუნქცია ისეთი, რომ $a_{i(j)}$ წარმოადგენს $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ –ებს შორის j-ურ უდიდეს;

$$p_j = g(\{s_{i(1)}, ..., s_{i(j)}\}) - g(\{s_{i(1)}, ..., s_{i(j-1)}\}),\quad g(\{s_{i(0)}\}) \equiv 0. \tag{2.1.14}$$

ცხადია, რომ $\{p_j\},\ i = 1,...,n$ მნიშვნელობები ქმნის ალბათურ განაწილებას S სიმრავლეზე.

მტკიცებულება 2.1.3 (Campos, 1989). თუ $P_\sigma, \sigma \in S_n$ არის g ფაზი ზომის ასოცირებული ალბათობები S სიმრავლეზე, მაშინ ის ყველა ცვლადისთვის $a: S \Rightarrow R_0^+$ მოქმედებს შემდეგნაირად:

$$\min_{\sigma \in S_n} PA_{P_\sigma}(a) \le CA_g(a) \le \max_{\sigma \in S_n} PA_{P_\sigma}(a); \qquad \min_{\sigma \in S_n} PG_{P_\sigma}(a) \le CG_g(a) \le \max_{\sigma \in S_n} PG_{P_\sigma}(a).$$

ბოლო უტოლობები ზოგადად შემთხვევაში სამართლიანია. ამასთან, ტევადობების კონკრეტულ შემთხვევაში, უტოლობები ტოლობაში ერთი მხრიდან აუცილებლად მიიღწევა. უფრო მეტიც, ეს ფაქტი ფაზი ზომების ამ კლასის მახასიათებელია:

მტკიცებულება 2.1.4 (Campos, 1989). (g_*, g^*) დუალური ფაზი ზომათა წყვილი ქვედა და ზედა მეორე რიგის ტევადობებისთვის აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი: ნებისმიერი $a: S \Rightarrow R_0^+$ ცვლადისთვის:

$$CA_{g_*}(a) = \min_{\sigma \in S_n} PA_{P_\sigma}(a), CA_{g^*}(a) = \max_{\sigma \in S_n} PA_{P_\sigma}(a) \quad or$$
$$CG_{g_*}(a) = \min_{\sigma \in S_n} PG_{P_\sigma}(a), CG_{g^*}(a) = \max_{\sigma \in S_n} PG_{P_\sigma}(a).$$

ამრიგად, მეორე რიგის ტევადობის ძირითადი მახასიათებელია ის, რომ ის დამოკიდებულია მხოლოდ ამ ზომებთან დაკავშირებულ ალბათობებზე, მაგრამ არ არის დამოკიდებული მათ გადანაცვლებაზე. ეს მახასიათებელი მნიშვნელოვნად აადვილებს მეორე რიგის ტევადობების მათი გამოყენებას ასოცირებული ალბათობით.

ახლა ჩვენ განვიხილავთ CA და CG ოპერატორების გავრცობებეი L_{IFVs} მესერზე:

განსაზღვრება 2.1.12 (Tan, 2010; Xu, 2010). დავუშვათ $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ არის სისტემის მდგომარეობების სიმრავლე, რომელზეც გვაქვს g ფაზი ზომა და ექსპერტული შეფასებების ინტუიციონისტური ფაზი ცვლადი $\alpha: S \Rightarrow IFVs$ ისეთი რომ $\alpha(s_i) \equiv \alpha_i = (\mu_{\alpha_i}, \nu_{\alpha_i}),\ i = 1,2,..., n$. მაშინ აგრეგირებას

$$\begin{aligned} &IFCA_g(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \mathop{\oplus}_{j=1}^{n} \left[p_j \alpha_{i(j)} \right] = \\ &\left(1 - \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \mu_{\alpha_{i(j)}} \right)^{p_j}, \quad \prod_{j=1}^{n} \left(\nu_{\alpha_{i(j)}} \right)^{p_j} \right) \end{aligned}, \tag{2.1.15}$$

ეწოდება ინტუიციონისტური ფაზი შოკეს გასაშუალოების (IFCA – Intuitionistic Fuzzy Choquet Averaging) ოპერატორი g ფაზი ზომასთან მიმართებაში და აგრეგირებას

$$IFCG_g(\alpha_1,...,\alpha_n) = \overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}}(\alpha_{i(j)})^{p_j}$$
$$= \left(\prod_{j=1}^{n} (\mu_{\alpha_{i(j)}})^{p_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - \nu_{\alpha_{i(j)}})^{p_j} \right) \qquad (2.1.16)$$

ეწოდება ინტუიციონისტური ფაზი შოკეს გეომეტრიული (IFCG – Intuitionistic Fuzzy Choquet Geometric) ოპერატორი g ფაზი ზომასთან მიმართებაში, სადაც

$$p_j = g(\{s_{i(1)},....., s_{i(j)}\}) - g(\{s_{i(1)},....., s_{i(j-1)}\}), \quad g(\{s_{i(0)}\}) \equiv 0 \ , \qquad (2.1.17)$$

და $\alpha_{i(j)}$ არის j-ური უდიდესი α_i, $i = 1,2,...,n$–დან $\geq_t$ -სრული დალაგების მიმართებასთან შესაბამისობაში.

IFCA და IFCG ოპერატორების ძირითადი თვისებები შესწავლილია ((Wu, 2013); (Xu, 2010))-ში.

2.2. ასოცირებული ალბათობები ალბათურ ინტუიციონისტურ ფაზი შეწონილ ოპერატორებში

2.1-ში განისაზღვრა IFCA ან IFCG ოპერატორები მათი ალბათური წარმოდგენით ასოცირებული ალბათობის კლასის (APC) $\{\mathrm{P}_\sigma\}_{\sigma \in S_m}$ მიხედვით, სადაც ალბათური განაწილებების რაოდენობა S სიმრავლეზე ტოლია $k = n!$. შევნიშნოთ რომ, (2.1.15) - (2.1.16) ფორმულებში მხოლოდ ერთი ასოცირებული ალბათობაა გამოყენებული, რომელიც განისაზღვრება *ინდექსების გარკვეული გადანაცვლებით* (2.1.17). ამრიგად, IFCA ან IFCG ოპერატორების გამოყენება MCDM/MADM-ის ამოცანებში, როდესაც გადაწყვეტილების ატრიბუტები დამოკიდებულია ან ურთიერთმოქმედია გადაწყვეტილების მიღების პროცესში და ეს ოპერატორები ასახავენ ურთიერთქმედებას მხოლოდ ატრიბუტების გარკვეულ, შეთანხმებულ (კონსონანტურ) კომბინაციებს შორის (2.1.17). შესაბამისად:

$$\{s_{i(1)}\},\ \{s_{i(1)}, s_{i(2)}\},\ \dots\ , \{s_{i(1)}, s_{i(2)},..., s_{i(n)}\}\ . \qquad (2.2.1)$$

როგორც დასაწყისში აღვნიშნეთ, ამ თავში წარმოდგენილი კვლევის მთავარი მიზანი იყო PWA (PWG) ოპერატორებზე დაფუძნებული ახალი ალბათური აგრეგირების ოპერატორების აგება ინტუიციონისტური ფაზი გარემოსთვის, როდესაც ახალი ოპერატორები ასახავენ ატრიბუტეტების შესახებ ყველა კომბინაციას

შორის საერთო ურთიერთქმედებას. *ამისათვის აუცილებელია P-IFWA და P-IFWG ოპერატორებში* <u>*ყველა ასოცირებული ალბათური კლასის*</u> *(APC)* $\{\mathrm{P}_\sigma\}_{\sigma\in S_m}$ $\{\mathrm{P}_\sigma\}_{\sigma\in S_m}$ *ჩართვა.* წარმოგიდგენთ შემდეგ მეთოდს: დავუშვათ M იყოს ინტუიციონისტური ფაზი ოპერატორი (განსაზღვრება 2.1.5).

განსაზღვრება 2.2.1 (Sirbiladze, Khutsishvili, Badagadze, Tsulaia, 2018) *ასოცირებული ალბათური* F *ოპერატორი* ზოგიერთი ინტუიციონისტური ფაზი ოპერაციისთვის M, $M: IFV_s^k \to IFVs$ $k=n!$ და S სიმრავლეზე g ფაზი ზომასთან მიმართებაში წარმოადგენს ასახვას $As-F_M: IFVs^n \to IFVs$:

$$As-F_M(\alpha_1,...,\alpha_n) = M\left(F_{P_{\sigma_1}}(\alpha_1,...,\alpha_n),...,F_{P_{\sigma_k}}(\alpha_1,...,\alpha_n)\right) \qquad (2.2.2)$$

სადაც $F \in \{P-IFWA, P-IFWG\}$; $F_{P_{\sigma_i}}(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $i=1,...,n!$ არის F ოპერატორის მნიშვნელობა, რომელიც გამოითვლება P_{σ_i} ასოცირებული ალბათური განაწილების მიმართ.

ამ ნაშრომში განხილულია მხოლოდ კერძო შემთხვევები, როდესაც $M=\vee$ (ინტუიციონისტური მაქსიმუმი – intuitionistic max) ან $M=\wedge$ (ინტუიციონისტური მინიმუმი – intuitionistic min). აქედან გამომდინარე, განხილულია შემდეგი ოთხი ინტუიციონისტური ფაზი ოპერატორი:

$$As-P-IFWA_M,\ As-P-IFWG_M,\ \ M\in\{\vee,\wedge\}\ . \qquad (2.2.3)$$

ასოცირებული ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი შეწონილი გასაშუალოების ოპერატორები (*The Associated Probability Intuitionistic Fuzzy Weighted Averaging Operators):*

$$As-P-IFWA_\vee(\alpha_1,...,\alpha_n) = \bigvee_{\sigma\in S_n}[\bigoplus_{i=1}^{n}(\bar{p}_{\sigma(i)}\cdot\alpha_i)\,], \qquad (2.2.4)$$

$$As-P-IFWA_\wedge(\alpha_1,...,\alpha_n) = \bigwedge_{\sigma\in S_n}[\bigoplus_{i=1}^{n}(\bar{p}_{\sigma(i)}\cdot\alpha_i)]\ , \qquad (2.2.5)$$

ასოცირებული ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი შეწონილი გეომეტრიული ოპერატორები (*The Associated Probability Intuitionistic Fuzzy Weighted Geometric Operators):*

$$As-P-IFWG_\vee(\alpha_1,...,\alpha_n) = \bigvee_{\sigma\in S_n}[\bigotimes_{i=1}^{n}(\alpha_i^{\bar{p}_{\sigma(i)}})\,], \qquad (2.2.6)$$

$$As-P-IFWG_{\wedge}(\alpha_1,...,\alpha_n)=\underset{\sigma\in S_n}{\wedge}[\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}(\alpha_i^{\overline{p}_{\sigma(i)}})], \qquad (2.2.7)$$

$w=(w_1,...,w_n)$ არის აგრეგირების წონითი ვექტორი ისეთი, რომ $w_j\in[0,1]$, $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$ და თითოეული ასოცირებული ალბათობისთვის $P_\sigma,\sigma\in S_n$, $\overline{p}_{\sigma(i)}=\beta p_{\sigma(i)}+(1-\beta)w_i$, $p_{\sigma(i)}\equiv P_\sigma(\alpha_i)$ წარმოადგენს ასოცირებულ ალბათობას განსაზღვრულს g ფაზი ზომით და წონით.

მტკიცებულება 2.2.1 (Sirbiladze, Khutsishvili, Badagadze, Tsulaia, 2018). S სიმრავლეზე g_* და g^* დუალური ფაზი ზომებისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$As-F_{*M}(\alpha_1,...,\alpha_n)=As-F_M^*(\alpha_1,...,\alpha_n), \qquad (2.2.8)$$

სადაც $As-F_{*M}$ და $As-F_M^*$ ოპერატორების მნიშვნელობები გამოითვლება g_* და g^* დუალური ფაზი ზომებით და $F\in\{P-IFWA,P-IFWG\}$, $M\in\{\vee,\wedge\}$.

დამტკიცება: ნებისმიერი ოპერატორი, რომელიც აიგო განსაზღვრება 2.2.1–ში სიმეტრიულია. თვისება 2-ის გამოყენების შედეგად მიიღწევა 2.2.8 ტოლობები.

მტკიცებულება 2.2.2 (Sirbiladze, Khutsishvili, Badagadze, Tsulaia, 2018). $As-P-IFWA_{\vee}$ ოპერატორის მნიშვნელობა წარმოადგენს ინტუიციონისტურ ფაზი სიდიდეს და

$$As-P-IFWA_{\vee}(\alpha_1,...,\alpha_n)=\left(1-\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right),\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right)\right). \qquad (2.2.9)$$

დამტკიცება: პირველი პირობა ადვილად გამომდინარეობს განსაზღვრება 2.1.4 და 2.2.1-დან. ასევე ქვემოთ ვამტკიცებთ ფორმულა 2.2.9–ის სამართლიანობას n–ზე მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით .

$n=2$–თვის, განსაზღვრება 2.1.4–ის საოპერაციო წესების მიხედვით გვაქვს: თითოეული გადანაცვლებისთვის $\sigma\in\{(1,2),(2,1)\}=S_2$

შემდეგ $\overline{p}_{\sigma(i)}\cdot\alpha_i=\left(1-\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}},\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right)$ და

$$\left(\overline{p}_{\sigma(1)}\cdot\alpha_1\right)\oplus\left(\overline{p}_{\sigma(2)}\cdot\alpha_2\right)=\left(1-\left(1-\mu_{\alpha_1}\right)^{\overline{p}_{\sigma(1)}}\cdot\left(1-\mu_{\alpha_2}\right)^{\overline{p}_{\sigma(2)}},\left(\nu_{\alpha_1}\right)^{\overline{p}_{\sigma(1)}}\cdot\left(\nu_{\alpha_2}\right)^{\overline{p}_{\sigma(2)}}\right),$$

მივიღებთ

$$As-P-IFWA_{\vee}(\alpha_1,\alpha_2)=\bigcup_{\sigma\in S_2}\left[\left(\overline{p}_{\sigma(1)}\cdot\alpha_1\right)\oplus\left(\overline{p}_{\sigma(2)}\cdot\alpha_2\right)\right]=$$

$$=\left(\max_{\sigma\in S_2}\left\langle 1-\left(1-\mu_{\alpha_1}\right)^{\overline{p}_{\sigma(1)}}\cdot\left(1-\mu_{\alpha_2}\right)^{\overline{p}_{\sigma(2)}}\right\rangle,\min_{\sigma\in S_2}\left\langle\left(\nu_{\alpha_1}\right)^{\overline{p}_{\sigma(1)}}\cdot\left(\nu_{\alpha_2}\right)^{\overline{p}_{\sigma(2)}}\right\rangle\right)=$$

$$=\left(1-\min_{\sigma\in S_2}\left(\prod_{i=1}^{2}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right),\min_{\sigma\in S_2}\left(\prod_{i=1}^{2}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right)\right).$$

ანუ $n=2$–თვის ტოლობა (ფორმულა 2.2.9) სამართლიანია.

დავუშვათ, აღნიშნული ტოლობის სამართლიანობა $n=k$–თვის ე.ი.

$$As-P-IFWA_{\vee}(\alpha_1,...,\alpha_k)=\left(1-\min_{\sigma\in S_k}\left(\prod_{i=1}^{k}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right),\min_{\sigma\in S_k}\left(\prod_{i=1}^{k}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right)\right).$$

შემდეგ, განსაზღვრება 2.2.1 – ის თანახმად (ფორმულა 2.2.4), გვაქვს

$$As-P-IFWA_{\vee}(\alpha_1,...,\alpha_k,\alpha_{k+1})=\bigcup_{\sigma\in S_{k+1}}\left[\bigoplus_{i=1}^{n}\left(\overline{p}_{\sigma(i)}\cdot\alpha_i\right)\right]=$$

$$=\bigcup_{\sigma\in S_{k+1}}\left[\left(\bigoplus_{i=1}^{k}\left(\overline{p}_{\sigma(i)}\cdot\alpha_i\right)\right)\otimes\left(\overline{p}_{\sigma(k+1)}\cdot\alpha_{k+1}\right)\right]=$$

$$=\bigcup_{\sigma\in S_{k+1}}\left[1-\prod_{i=1}^{k}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}+1-\left(1-\mu_{\alpha_{k+1}}\right)^{\overline{p}_{\sigma(k+1)}}\left(1-\prod_{i=1}^{k}\left(1-\mu_{\alpha_{\alpha_i}}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right)\cdot\left(1-\left(1-\mu_{\alpha_{k+1}}\right)^{\overline{p}_{\sigma(k+1)}}\right),\right.$$

$$\left.\prod_{i=1}^{k}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\cdot\left(\nu_{\alpha_{k+1}}\right)^{\overline{p}_{\sigma(k+1)}}\right]=\bigcup_{\sigma\in S_{k+1}}\left[1-\prod_{i=1}^{k}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\cdot\left(1-\mu_{\alpha_{k+1}}\right)^{\overline{p}_{\sigma(k+1)}},\prod_{i=1}^{k+1}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right]=$$

$$=\bigcup_{\sigma\in S_{k+1}}\left(1-\prod_{i=1}^{k+1}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}},\prod_{i=1}^{k+1}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right)=$$

$$=\left(\max_{\sigma\in S_{k+1}}\left(1-\prod_{i=1}^{k+1}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right),\min_{\sigma\in S_{k+1}}\left(\prod_{i=1}^{k+1}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right)\right)=$$

$$=\left(1-\min_{\sigma\in S_{k+1}}\left(\prod_{i=1}^{k+1}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right),\min_{\sigma\in S_{k+1}}\left(\prod_{i=1}^{k+1}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right)\right).$$

ანუ $n=k+1$–თვის ტოლობა (ფორმულა 2.2.9) სამართლიანია. აქედან, გამომდინარე სამართლიანია ნებისმიერი n–თვის.

მტკიცებულება 2.2.3–ის დამტკიცება არ არის განხილული, რადგან მტკიცებულება 2.2.2–ის დამტკიცების ანალოგიურია.

მტკიცებულება 2.2.3 (Sirbiladze, Khutsishvili, Badagadze, Tsulaia, 2018). $As-F_M$ ოპერატორების მნიშვნელობები ინტუიციონისტური ფაზი სიდიდეებია და

$$As-P-IFWA_{\wedge}(\alpha_1,...,\alpha_n)=\left(1-\max_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right),\max_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\overline{p}_{\sigma(i)}}\right)\right),\quad(2.2.10)$$

$$As-P-IFWG_{\vee}(\alpha_1,...,\alpha_n)=\left(\max_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\mu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right),1-\max_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\nu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\right), \quad (2.2.11)$$

$$As-P-IFWG_{\wedge}(\alpha_1,...,\alpha_n)=\left(\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\mu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right),1-\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\nu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\right). \quad (2.2.12)$$

მტკიცებულება 2.2.4 (Sirbiladze, Khutsishvili, Badagadze, Tsulaia, 2018). დავუშვათ g არის S სიმრავლეზე მეორე რიგის ქვედა ტევადობა. მაშინ $As-P-IFWA_{\vee}$ ($As-P-IFWG_{\wedge}$) ოპერატორი ემთხვევა IFCA (IFCG) ოპერატორებს:

$$(a). \qquad As-P-IFWA_{\vee}(\alpha_1,...,\alpha_n)=IFCA_{\bar{g}}(\alpha_1,...,\alpha_n),$$
$$(b). \qquad As-P-IFWG_{\wedge}(\alpha_1,...,\alpha_n)=IFCG_{\bar{g}}(\alpha_1,...,\alpha_n)$$

თუ $\alpha_1,...,\alpha_n\in IFVs$ დალაგებულია ნაწილობრივი დალაგების მიმართებით $\geq_{\mathrm{L_{IFVs}}}$; $\bar{g}$ არის მეორე რიგის ქვედა ტევადობა, ასოცირებული ალბათობების მნიშვნელობები განისაზღვრება, როგორც

$$\forall\sigma\in S_{n,}\ \bar{p}_{\sigma(i)}=\beta p_{\sigma(i)}+(1-\beta)w_i,\ 0<\beta\leq 1;\ i=1,...,n\ ,$$

სადაც $p_{\sigma(\cdot)}$ არის g ფაზი ზომის ასოცირებული ალბათური სიდიდე და w_i არის α_i–ის წონა.

დამტკიცება:

a). დავუშვათ g არის S სიმრავლეზე მეორე რიგის ქვედა ტევადობა. მტკიცებულება 2.2.2–ში (ფორმულა 2.2.9) განვიხილავთ ფუნქციას – ასოცირებული ალბათური განაწილებების ნამრავლის მინიმუმი

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\ ,\ \sigma\in S_n. \quad (2.2.13)$$

ეს ნამრავლი იღებს მინიმუმს არგუმენტის წერტილებზე $\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)$ ფუნქციისთვის, რადგან ლოგარითმი მკაცრად მონოტონური ფუნქციაა. ამიტომ,

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_{\sigma(i)}\cdot\ln\left(1-\mu_{\alpha_i}\right).$$

და

$$\min_{\sigma\in S_n}\left[\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\right]=\min_{\sigma\in S_n}\left[\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_{\sigma(i)}\cdot\ln\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)\right].$$

მტკიცებულება 2.1.4–ის შედეგების გამოყენებით მინიმუმი წარმოადგენს შოკეს გასაშუალოების ოპერატორს $\ln(1-\mu_{\alpha_1}),...,\ln(1-\mu_{\alpha_n})$ სიდიდეებისთვის $\bar{g}:\forall A\subset S,\ \bar{g}(A)=\beta g(A)+(1-\beta)\cdot\sum_{s_i\in A}w_i$ ფაზი ზომასთან მიმართებაში.

ცხადია, რომ $\bar{g}$ ფაზი ზომა არის აგრეთვე მეორე რიგის ქვედა ტევადობა $\{\bar{p}_\sigma\}_{\sigma\in S_n}$ APC -ით.

თუ $\pi\in S_n$ ისეთი გადანაცვლება, რომლისთვისაც

$$\ln(1-\mu_{\alpha_{\pi(1)}})\geq\ln(1-\mu_{\alpha_{\pi(2)}})\geq\Lambda\ \geq\ln(1-\mu_{\alpha_{\pi(n)}}),\qquad(2.2.14)$$

მაშინ მტკიცებულება 2.1.4–ის ფორმულების მიხედვით ვღებულობთ:

$$\min_{\sigma\in S_n}\left[\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_i})^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\right]=CA_{\bar{g}}\left(\ln(1-\mu_{\alpha_{\pi(1)}}),...,\ln(1-\mu_{\alpha_{\pi(n)}})\right).$$

უტოლობებიდან (2.2.14) გამომდინარეობს, რომ

$$1-\mu_{\alpha_{\pi(1)}}\geq1-\mu_{\alpha_{\pi(2)}}\geq\Lambda\ \geq1-\mu_{\alpha_{\pi(n)}}$$

და ნამრავლის ფუნქციისთვის (2.2.13) ვღებულობთ

$$\min_{\sigma\in S_n}\left[\left(\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_i})^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\right]=\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_i})^{\bar{p}_{\tau(i)}}\quad.\qquad(2.2.15)$$

სადაც $\bar{p}_{\pi(i)}=\bar{g}(\{s_{\pi(1)},\mathrm{K}\ ,s_{\pi(i)}\})-\bar{g}(\{s_{\pi(1)},\mathrm{K}\ ,s_{\pi(i-1)}\})$.

2.2.13–ში ნაჩვენები ნამრავლის ფუნქციის ანალოგიურად ვღებულობთ შედეგს $\prod_{i=1}^{n}(\nu_{\alpha_i})^{\bar{p}_{\sigma(i)}}$ ნამრავლის ფუნქციისთვისაც:

$$\min_{\sigma\in S_n}\left[\prod_{i=1}^{n}(\nu_{\alpha_i})^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right]=\prod_{i=1}^{n}(\nu_{\alpha_{\pi'(i)}})^{\bar{p}_{\pi'(i)}},\qquad(2.2.16)$$

სადაც $\pi'\in S_n$; $\bar{p}_{\pi'(i)}=\bar{g}(\{s_{\pi'(1)},\mathrm{K}\ ,s_{\pi'(i)}\})-\bar{g}(\{s_{\pi'(1)},\mathrm{K}\ ,s_{\pi'(i-1)}\})$ და $\nu_{\alpha_{\pi'(1)}}\geq\nu_{\alpha_{\pi'(2)}}\geq\Lambda\ \geq\nu_{\alpha_{\pi'(n)}}$.

რადგან სიდიდეები $\alpha_1,...,\alpha_n$ დალაგებული არიან ნაწილობრივი დალაგებული მიმართებით $\leq_{L_{IFVs}}$, არსებობს გადანაცვლება $\tau\in S_n$ ისეთი, რომ

$$\mu_{\alpha_{\tau(1)}}\leq\mu_{\alpha_{\tau(2)}}\leq\Lambda\ \leq\mu_{\alpha_{\tau(n)}}\ \text{და}\ \nu_{\alpha_{\tau(1)}}\geq\nu_{\alpha_{\tau(2)}}\geq\Lambda\ \geq\nu_{\alpha_{\tau(n)}}.$$

(2.2.15) და (2.2.16) ფორმულებზე დაყრდნობით ვღებულობთ იგივე გადანაცვლებას $\pi=\pi'=\tau$. შედეგად მივიღეთ:

$$As-P-IFWA(\alpha_1,...,\alpha_n)=\left(1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_{\tau(i)}}\right)^{\bar{p}_{\tau(i)}},\ \prod_{i=1}^{n}\left(\nu_{\alpha_{\tau(i)}}\right)^{\bar{p}_{\tau(i)}}\right)=$$

$$=IFCA_{\bar{g}}(\alpha_1,...,\alpha_n),$$

სადაც $\bar{p}_{\tau(i)=}\bar{g}(\{s_{\tau(1)},\mathrm{K}\,,s_{\tau(i)}\})-\bar{g}(\{s_{\tau(1)},\mathrm{K}\,,s_{\tau(i-1)}\})$. b) ვარიანტის დამტკიცებაც ანალოგიურია.

განვიხილოთ მტკიცებულება 2.2.5, რომლიც დამტკიცებაც მტკიცებულება 2.2.4–ის ანალიგიურია.

მტკიცებულება 2.2.5 (Sirbiladze, Khutsishvili, Badagadze, Tsulaia, 2018). დავუშვათ g არის S სიმრავლეზე მეორე რიგის ზედა ტევადობა. მაშინ $As-P-IFWA_{\wedge}$ $(As-P-IFWG_{\vee})$ ოპერატორი ემთხვევა IFCA (IFCG) ოპერატორებს:

$$As-P-IFWA_{\wedge}(\alpha_1,...,\alpha_n)=IFCA_{\bar{g}}(\alpha_1,...,\alpha_n),$$
$$(As-P-IFWG_{\vee}(\alpha_1,...,\alpha_n)=IFCG_{\bar{g}}(\alpha_1,...,\alpha_n)),$$

თუ $\alpha_1,...,\alpha_n\in IFVs$ დალაგებულია ნაწილობრივი დალაგების მიმართებით $\geq_{\mathrm{L_{IFVs}}}$; $\bar{g}$ არის მეორე რიგის ზედა ტევადობა, ასოცირებული ალბათობების მნიშვნელობები განისაზღვრება, როგორც $\forall\sigma\in S_{n,}$ $\bar{p}_{\sigma(i)}=\beta p_{\sigma(i)}+(1-\beta)w_i,\quad 0<\beta\leq 1,\quad i=1,...,n$, სადაც $p_{\sigma(\cdot)}$ არის g ფაზი ზომის ასოცირებული ალბათური სიდიდე და w_i არის α_i–ის წონა.

მტკიცებულება 2.2.6 (Sirbiladze, Khutsishvili, Badagadze, Tsulaia, 2018). ფუნქციები $As-P-IFWA_M$ და $As-P-IFWG_M$, სადაც $M\in\{\vee,\wedge\}$, არიან ინტუიციონისტური ფაზი აგრეგირების ოპერატორები (Intuitionistic Fuzzy Aggregation Operators) L_{IFVs}-ზე.

დამტკიცება: შემთხვევა 1. დავუშვათ $M=\vee$ და ვითვალისწინებთ, რომ $As-P-IFWA_{\vee}:L_{IFVs}^n\to L_{IFVs}$. მტკიცებულება 2.2.2–ზე (ფორმულა 2.2.9) დაყრდობით ვიღებთ:

$$As-P-IFWA_{\vee}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\left(1-\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right),\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\right).\qquad(2.2.17)$$

დავუშვათ გვაქვს IFV–ების ორი კოლექცია: $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ და $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ წყვილური დალაგებით $\leq_{\mathrm{L_{IFVs}}}$: ან $\forall i\in\{1,2,...,n\}$, $\alpha_i\leq_{\mathrm{L_{IFVs}}}\beta_i\Leftrightarrow\mu_{\alpha_i}\leq\mu_{\beta_i}$ $and\,\nu_{\alpha_i}\geq\nu_{\beta_i}$.

უნდა დავამტკიცოთ, რომ

$$As-P-IFWA_{\mathrm{Y}}(\alpha_1,...,\alpha_n)\leq_{\mathrm{L_{IFVs}}}As-P-IFWA_{\mathrm{Y}}(\beta_1,...,\beta_n).\qquad(2.2.18)$$

გვაქვს, $\forall \sigma \in S_n$:

$$1-\mu_{\alpha_i} \geq 1-\mu_{\beta_i} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}} \geq \prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\beta_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}} \text{ და}$$

$$\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right) \geq \min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\beta_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$1-\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right) \leq 1-\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\beta_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right). \tag{2.2.19}$$

ეს პირველი აუცილებელი უტოლობაა (2.2.18)–თვის. ანალოგიურად ვღებულობთ:

$$\nu_{\alpha_{\sigma(i)}} \geq \nu_{\beta_{\sigma(i)}} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}} \geq \left(\nu_{\beta_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}} \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}} \geq \prod_{i=1}^{n}\left(\nu_{\beta_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}$$

$$\Rightarrow \quad \min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right) \geq \min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\nu_{\beta_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right). \tag{2.2.20}$$

(2.2.19) და (2.2.20) უტოლობებიდან გამომდინარეობს (2.2.18) უტოლობა, ამიტომ, $As-P-IFWA_{\vee}$ ოპერატორი მონოტონურია $\leq_{\mathrm{L_{IFVs}}}$ –თან მიმართებაში.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$As-P-IFWA_{\vee}(0_{\mathrm{L_{IFVs}}},...,0_{\mathrm{L_{IFVs}}}) = 0_{\mathrm{L_{IFVs}}}$ და $As-IFWA_{\vee}(1_{\mathrm{L_{IFVs}}},...,1_{\mathrm{L_{IFVs}}}) = 1_{\mathrm{L_{IFVs}}}$.

ამრიგად, $As-P-IFWA_{\vee}$ ფუნქცია არის ინტუიციონისტური ფაზი აგრეგირების ოპერატორი.

პირველი შემთხვევის ანალოგიურად მტკიცდება, ის შემთხვევები, როცა $M = \wedge$ $As-P-IFWA_{M}$ ოპერატორისთვის ან როცა $M \in \{\vee, \wedge\}$ $As-P-IFWG_{M}$ ოპერატორისთვის.

შენიშვნა 2.2.1. $As-F_{M}$, $M \in \{\vee, \wedge\}, F \in \{P-IFWA, P-IFWG\}$ ოპერატორების მონოტონურობის გამოყენებით ადვილია დავამტკიცოთ შემდეგი უტოლობების ჭეშმარიტობა: დავუშვათ გვაქვს IFV– ების ორი კოლექცია: $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ და $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, მაშინ

$$As-F_M(\alpha_1 \wedge \beta_1, ..., \alpha_n \wedge \beta_n) \leq_{\mathrm{L_{IFVs}}}$$
$$As-F_M(\alpha_1, ..., \alpha_n) \wedge As-F_M(\beta_1, ..., \beta_n);$$
$$As-F_M(\alpha_1 \vee \beta_1, ..., \alpha_n \vee \beta_n) \geq_{\mathrm{L_{IFVs}}}$$
$$As-F_M(\alpha_1, ..., \alpha_n) \vee As-F_M(\beta_1, ..., \beta_n) .$$

შენიშვნა 2.2.2. $As-F_M$, $M\in\{\vee,\wedge\}$, $F\in\{P-IFWA, P-IFWG\}$ აგრეგირების ფუნქციები აკმაყოფილებს იდემპოტენციურობის თვისებას.

მტკიცებულება 2.2.7 (Sirbiladze, Khutsishvili, Badagadze, Tsulaia, 2018). $As-F_M$ $M\in\{\vee,\wedge\}$, $F\in\{P-IFWA, P-IFWG\}$ აგრეგირების ფუნქციები შემოსაზღვრულია. თუ $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in IFVs$, მაშინ

$$A^- \le_{\mathrm{L_{IFVs}}} IF-As-PA_M(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\le_{\mathrm{L_{IFVs}}} A^+ , \tag{2.2.21}$$

სადაც A^- და A^+ წარმოადგენენ $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ სიმრავლის მინიმალურ და მაქსიმალურ ელემენტებს $\vee$ და $\wedge$ ოპერაციებთან მიმართებაში, და

$$A^-=\mathop{\wedge}_{i=1}^{n}\alpha_i=\left(\min_{i=1,\dots,n}\mu_{\alpha_i},\max_{i=1,\dots,n}\nu_{\alpha_i}\right)=\left(\mu^-,\nu^+\right);$$

$$A^+=\mathop{\vee}_{i=1}^{n}\alpha_i=\left(\max_{i=1,\dots,n}\mu_{\alpha_i},\min_{i=1,\dots,n}\nu_{\alpha_i}\right)=\left(\mu^+,\nu^-\right).$$

დამტკიცება: შემთხვევა 1. დავუშვათ $M=\vee$ და მაგალითისთვის გავითვალისწინოთ $As-P-IFWA_\vee$ ოპერატორი. ცნობილია, რომ

$$As-P-IFWA_\vee(\alpha_1,...,\alpha_n)=\left(1-\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right),\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\right).$$

$\forall\sigma\in S_n$–თვის გვაქვს: $1-\mu_i\le 1-\mu^- \quad\Rightarrow\quad \left(1-\mu_i\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\le\left(1-\mu^-\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}$ და

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\le\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu^-\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}=\left(1-\mu^-\right)^{\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_{\sigma(i)}}=1-\mu^- .$$

ამრიგად,

$$1-\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\ge 1-\left(1-\mu^-\right)=\mu^- .$$

ანალოგიურად შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი უტოლობა:

$$\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\le\nu^+ .$$

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ (2.2.21)–ის მარცხენა უტოლობა. მარჯვენა უტოლობაც მიიღება ანალოგიურად, ხოლო სხვა $As-F_M$ ოპერატორების შემთხვევაში დამტკიცების პროცესი ანალოგიურია.

შენიშვნა 2.2.3. $As-P-IFWA_M$ და $As-P-IFWG_M$, $M\in\{\vee,\wedge\}$ აგრეგირების ფუნქციები სიმეტრიულია.

შენიშვნა 2.2.4. $As-P-IFWA_M$ და $As-P-IFWG_M$, $M\in\{\vee,\wedge\}$ ოპერატორები არიან გასაშუალოების აგრეგირების ოპერატორები (*მონოტონურობა, სიმეტრიულობა, შემოსაზღვრულობა და იდემპოტენციურობა*) L_{IFVs} მესერზე ნაწილობრივი დალაგების მიმართებით $\geq_{L_{IFVs}}$.

დამტკიცება: აღნიშნული შენიშვნა ეყრდობა 2.2.6 – 2.2.7 მტკიცებულებებს და ადვილი საჩვენებელია.

განვიხილოთ $As-P-IFWA_M$ და $As-P-IFWG_M$, $M\in\{\vee,\wedge\}$ ოპერატორების მონოტონურობის თვისება სამკუთხა ნორმების გამოყენების თვალსაზრისით.

განვიხილოთ ორი ძირითადი დუალური სამკუთხა ნორმა (Beliakov, 2007):

1). t-ნორმა $T_p:[0;1]^2\Rightarrow[0;1],\ T_p(x,y)=x\cdot y$ (ნამრავლი) და t-კონორმა

$S_p:[0;1]^2\Rightarrow[0;1],\ S_p(x,y)=x+y-x\cdot y$ (ალბათური ჯამი);

2). t-ნორმა $T_{\min}:[0;1]^2\Rightarrow[0;1],\ T_{\min}(x,y)=\min(x;y)$ (მინიმუმი) და t-კონორმა

$S_{\max}:[0;1]^2\Rightarrow[0;1],\ S_{\max}(x,y)=\max(x,y)$ (მაქსიმუმი).

ისინი აკმაყოფილებენ შემოსაზღვრულობის, მონოტონურობის, კომუტატიურობის და ასოციაციურობის თვისებებს. დუალური სამკუთხა ნორმების ასოციაციურობა საშუალებას გვაძლევს განვავრცოთ ეს ნორმები უნიკალური გზით n -ურ ოპერაციამდე ჩვეულებრივი ინდუქციური გზით, თითოეული n-კორტეჟისთის $(x_1,...,x_n)\in[0;1]^n$ განისაზღვროს:

$$T_p(x_1,...,x_n)=\prod_{i=1}^n x_i,\ S_p(x_1,...,x_n)=1-\prod_{i=1}^n(1-x_i);$$
$$T_{\min}(x_1,...,x_n)=\min_{i=1,\dots,n}(x_i),\ S_{\max}(x_1,...,x_n)=\max_{i=1,\dots,n}(x_i)\ .$$

ჩავთვალოთ, რომ $\forall\ \sigma^{(j)}\in S_n,\ j=1,...n!,$ გადანაცვლებაა და $i=1,\dots,n$

$$\begin{aligned} x_{\sigma^{(j)}(i)}&\equiv\mu_{\alpha_{\sigma_i}}^{\bar p_{\sigma^{(j)}(i)}};\quad y_{\sigma^{(j)}(i)}\equiv1-(1-\nu_{\alpha_{\sigma_i}})^{\bar p_{\sigma^{(j)}(i)}};\\ t_{\sigma^{(j)}(i)}&\equiv\nu_{\alpha_{\sigma_i}}^{\bar p_{\sigma^{(j)}(i)}};\quad z_{\sigma^{(j)}(i)}\equiv1-(1-\mu_{\alpha_{\sigma_i}})^{\bar p_{\sigma^{(j)}(i)}}\ . \end{aligned}\tag{2.2.22}$$

2.2.2 – 2.2.3 მტკიცებულებების შედეგების მიხედვით (ფორმულები 2.2.9 - 2.2.12) აგებული ოპერატორები შეიძლება დაიწეროს დუალური ნორმების კომპოზიციების სახით: (T_p,S_p) და $(T_{\min},S_{\max})$:

$$As-P-IFWA_{\vee}(\alpha_1,...,\alpha_n)=(S_{\max}[S_p(z_{\sigma^{(1)}(1)},...,z_{\sigma^{(1)}(n)}),...,S_p(z_{\sigma^{(n!)}(1)},...,z_{\sigma^{(n!)}(n)})],$$
$$T_{\min}[T_p(t_{\sigma^{(1)}(1)},...,t_{\sigma^{(1)}(n)}),...,T_p(t_{\sigma^{(n!)}(1)},...,t_{\sigma^{(n!)}(n)})]);$$
$$As-P-IFWA_{\wedge}(\alpha_1,...,\alpha_n)=(T_{\min}[S_p(z_{\sigma^{(1)}(1)},...,z_{\sigma^{(1)}(n)}),...,S_p(z_{\sigma^{(n!)}(1)},...,z_{\sigma^{(n!)}(n)})],$$
$$S_{\max}[T_p(t_{\sigma^{(1)}(1)},...,t_{\sigma^{(1)}(n)}),...,T_p(t_{\sigma^{(n!)}(1)},...,t_{\sigma^{(n!)}(n)})]);$$
$$As-P-IFWG_{\wedge}(\alpha_1,...,\alpha_n)=(T_{\min}[T_p(x_{\sigma^{(1)}(1)},...,x_{\sigma^{(1)}(n)}),...,T_p(x_{\sigma^{(n!)}(1)},...,x_{\sigma^{(n!)}(n)})],$$
$$S_{\max}[S_p(y_{\sigma^{(1)}(1)},...,y_{\sigma^{(1)}(n)}),...,S_p(y_{\sigma^{(n!)}(1)},...,y_{\sigma^{(n!)}(n)})]).$$
(2.2.23)

ნაჩვენებია, რომ $As-P-IFWA_M$, $As-P-IFWG_M$, $M\in\{\vee,\wedge\}$ ოპერატორების ახალი კონსტრუქციები განისაზღვრება კომპოზიციებით

$$(S_p \circ S_{\max}),\ \ (S_p \circ T_{\min}),\ \ (T_p \circ T_{\max}),\ \ (T_p \circ S_{\min}), \quad (2.2.24)$$

მაგრამ სხვადასხვა არგუმენტებისთვის. მტკიცებულება 2.2.6–ის პირობების მიხედვით (შემთხვევა 1, უტოლობა 2.2.18) დავუშვათ ცვლადები x', y', t', z' აღნიშნავს ტოლობებს (2.2.22) $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\in IFVs$ –თვის. დუალური ნორმების (T_p,S_p) და $(T_{\min},S_{\max})$ მონოტონურობის და ასოციაციურობის თვისებიდან გამომდინარეობს (2.2.24) კომპოზიციის იგივე თვისებები. ადვილია იმის ჩვენება, რომ მათ არგუმენტებს შორის მონოტონურობა არსებობს:

$$x_{\sigma^{(j)}(i)}\le x'_{\sigma^{(j)}(i)};\ \ y_{\sigma^{(j)}(i)}\ge y'_{\sigma^{(j)}(i)};\ \ t_{\sigma^{(j)}(i)}\ge t'_{\sigma^{(j)}(i)};\ \ z_{\sigma^{(j)}(i)}\le z'_{\sigma^{(j)}(i)}\ . \quad (2.2.25)$$

აგებული ოპერატორების უტოლობების (2.2.18) და კომპოზიციების მონოტონურობის (2.2.24) და ასევე $\le_{L_{IFVs}}$ დალაგებული მიმართების განსაზღვრისას ნათელია, რომ $As-P-IFWA_{\vee}$ ოპერატორი მონოტონურია. ანალოგიური კომპოზიციური კავშირების მიღება შესაძლებელია სხვა ოპერატორებისთვისაც.

მტკიცებულება 2.2.8 (Sirbiladze, Khutsishvili, Badagadze, Tsulaia, 2018). ვთქვათ მოცემულია $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in IFVs$ და დავუშვათ არსებობს $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ სიმრავლეზე ნაწილობრივი დალაგება $\le_{L_{IFVs}}$. მაშინ

$$As-F_{\vee}\ge_{L_{IFVs}} As-F_{\wedge} \quad (2.2.26)$$

და თუ $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})$–თვის, $\mu_{\alpha_i}\ge\nu_{\alpha_i}$, $i=1,2,...,n$, მაშინ

$$(As-IFWA_{\wedge})^c\ge_{L_{IFVs}} As-IFWG_{\vee}\ , \quad (2.2.27)$$

$$(As-IFWA_{\vee})^{c} \leq_{\mathrm{L_{IFVs}}} As-IFWG_{\wedge} \quad .$$

მტკიცებულება 2.2.9 (Sirbiladze, Khutsishvili, Badagadze, Tsulaia, 2018). დავუშვათ მოცემულია IFV–ების კოლექცია $-\alpha_1,...,\alpha_n$ და S სიმრავლეზე g ფაზი ზომა. თუ $\beta=(\mu_\beta,\nu_\beta)$ არის IFV, მაშინ $As-F_M$ $M\in\{\vee,\wedge\}$ $F\in\{P-IFWA,P-IFWG\}$ აგრეგირების ფუნქციისთვის გვაქვს

$$As-F_M(\alpha_1\oplus\beta,...,\alpha_n\oplus\beta)=As-F_M(\alpha_1,...,\alpha_n)\oplus\beta.$$

დამტკიცება: ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ As-P-IFWA ოპერატორს. სხვა შემთხვევები ანალოგიური იქნება და არ განვიხილავთ. ვინაიდან ნებისმიერი $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}),\ i=1,...,n$, $\alpha_i\oplus\beta=(\mu_{\alpha_i}+\mu_\beta-\mu_{\alpha_i}\cdot\mu_\beta,\nu_{\alpha_i}\cdot\nu_\beta)=(1-(1-\mu_{\alpha_i})(1-\mu_\beta),\nu_{\alpha_i}\cdot\nu_\beta)$.

მტკიცებულება 2.2.2–ის მიხედვით, გვაქვს

$$As-P-IFWA_{\mathrm{Y}}(\alpha_1\oplus\beta,...,\alpha_n\oplus\beta)=\begin{pmatrix}1-\min\limits_{\sigma\in S_n}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\left((1-\mu_{\alpha_i})(1-\mu_\beta)\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right),\\ \min\limits_{\sigma\in S_n}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\nu_{\alpha_i}\nu_\beta\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\end{pmatrix}=$$

$$\left(1-(1-\mu_\beta)^{\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_{\sigma(i)}}\cdot\min\limits_{\sigma\in S_n}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\left((1-\mu_{\alpha_i})\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right),\nu_\beta^{\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_{\sigma(i)}}\cdot\min\limits_{\sigma\in S_n}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\right)=$$

$$\left(1-(1-\mu_\beta)\cdot\min\limits_{\sigma\in S_n}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\left((1-\mu_{\alpha_i})\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right),\nu_\beta\cdot\min\limits_{\sigma\in S_n}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\right).$$

განსაზღვრება 2.1.4–ის მიხედვით

$$As-P-IFWA_{\mathrm{Y}}(\alpha_1,...,\alpha_n)\oplus\beta=\begin{pmatrix}1-(1-\mu_\beta)\cdot\min\limits_{\sigma\in S_n}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\left((1-\mu_{\alpha_i})\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right),\\ \nu_\beta\cdot\min\limits_{\sigma\in S_n}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\end{pmatrix}.$$

მტკიცებულება 2.2.10 (Sirbiladze, Khutsishvili, Badagadze, Tsulaia, 2018). დავუშვათ მოცემულია IFV–ების კოლექცია $-\alpha_1,...,\alpha_n$ და S სიმრავლეზე ფაზი ზომა. თუ $\beta=(\mu_\beta,\nu_\beta)$ არის IFV , მაშინ $r>0$–თვის

$$As-F_M(r\alpha_1,...,r\alpha_n)=r\cdot As-F_M(\alpha_1,...,\alpha_n).$$

დამტკიცება: ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ As-P-IFWA ოპერატორს. სხვა შემთხვევები ანალოგიური იქნება და არ განვიხილავთ. განსაზღვრება 2.1.4–ის მიხედვით თითოეული $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}),\ i=1,...,n$ –თვის და $r>0$–თვის

$$r\alpha_i = \left(1-(1-\mu_{\alpha_i})^r, {\nu_{\alpha_i}}^r\right).$$

მტკიცებულება 2.2.2–ის მიხედვით, გვაქვს

$$As-P-IFWA_{\vee}(r\alpha_1,...,r\alpha_n) = \left(1-\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^n\left((1-\mu_{\alpha_i})^r\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right), \min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^n\left({\nu_{\alpha_i}}^r\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\right) =$$

$$= \left(1-\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^n\left((1-\mu_{\alpha_i})\right)^{r\bar{p}_{\sigma(i)}}\right), \min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^n\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{r\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\right).$$

განსაზღვრება 2.1.4–ის მიხედვით

$$r\cdot As-P-IFWA_{\vee}(\alpha_1,...,\alpha_n) = r\cdot\left(1-\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^n\left((1-\mu_{\alpha_i})\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)^r, \min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^n\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\right)^r =$$

$$= \left(1-\min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^n\left((1-\mu_{\alpha_i})\right)^{r\bar{p}_{\sigma(i)}}\right), \min_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^n\left(\nu_{\alpha_i}\right)^{r\bar{p}_{\sigma(i)}}\right)\right).$$

შენიშვნა 2.2.5. 2.2.9 – 2.2.10 მტკიცებულებების გამოყენებით ვღებულობთ შემდეგ ფორმულას:

$$As-F_M(r\alpha_1\oplus\beta,...,r\alpha_n\oplus\beta) = r\cdot As-F_M(\alpha_1,...,\alpha_n)\oplus\beta.$$

შენიშვნა 2.2.6. დავუშვათ 2.2.9 - 2.2.12 ფორმულებში ფაზი ზომა იყოს ალბათობა $(g=P)$. მტკიცებულება 2.1.2–დან გამომდინარე ფაზი ზომის ასოცირებული ალბათობები ემთხვევა და ასევე ემთხვევა სიდიდეები ყველა (2.2.9)-(2.2.12) ოპერატორში. აღნიშნული ოპერატორების იდემპოტენციურობის თვისების გამოყენებით მივიღებთ: $\forall M\in\{\vee,\wedge\}$ –თვის და $\forall F\in\{P-IFWA, P-IFWG\}$

$$As-F_M = F.$$

შენიშვნა 2.2.7. თუ 2.2.9 - 2.2.12 ფორმულებში $\beta=0$, მაშინ $\forall M\in\{\vee,\wedge\}$–თვის

$$As-P-IFWA_M = IFWA,\; As-P-IFWG_M = IFWG.$$

შენიშვნა 2.2.8. თუ 2.2.9 - 2.2.12 ფორმულებში $\beta=1$და g ფაზი ზომა არის ალბათობა, მაშინ $\forall M\in\{\vee,\wedge\}$–თვის

$$As-P-IFWA_M = P-IFWA,\; As-P-IFWG_M = P-IFWG.$$

შენიშვნა 2.2.9. თუ 2.2.9 - 2.2.12 ფორმულებში $\beta=0,\; w_s=1$ და $w_j=0,\; j\neq s$, მაშინ $As-F_M(\alpha_1,...,\alpha_n)=\alpha_s$, და ეს ოპერატორები არიან ბიჯ-ტიპის ორიენტირებული ოპერატორები (step-type operators).

განვიხილოთ აგებულ ოპერატორებს შორის კავშირები. ვიუმ (Wu, 2013) დეტალურად განიხილა ინტუიციონისტური ფაზი შოკეს გასაშუალოების (IFCA) და ინტუიციონისტური ფაზი შერწყმული შოკეს გასაშუალოების ოპერატორების აგრეგირების თვისებები.

განსაზღვრება 2.2.2 (Wu, 2013). დავუშვათ $S=\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ არის სისტემის მდგომარეობების სიმრავლე, რომელზეც გვაქვს g ფაზი ზომა და ექსპერტული შეფასებების ინტუიციონისტური ფაზი ცვლადი $\alpha : S \Rightarrow IFVs$ ისეთი, რომ $\alpha(s_i) \equiv \alpha_i = (\mu_{\alpha_i}, \nu_{\alpha_i}), \quad i=1,2,...,n$. მაშინ აგრეგირებას

$$(\bar{c})IFCA_g(\alpha_1,...,\alpha_n) \equiv IFCCA_g(\alpha_1,...,\alpha_n) = (IFCA_g((\alpha_1)^c,...,(\alpha_n)^c))^c = \\ (\bigoplus_{j=1}^{n}\left[p_j(\alpha_{i(j)})^c\right])^c = \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\mu_{\alpha_{i(j)}}\right)^{p_j}, \quad 1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\nu_{\alpha_{i(j)}}\right)^{p_j}\right) \tag{2.2.28}$$

უწოდებენ ინტუიციონისტურ ფაზი შეუღლებულ შოკეს გასაშუალოების (IFCCA – Intuitionistic Fuzzy Conjugate Choquet Averaging) ოპერატორს g ფაზი ზომასთან მიმართებაში.

განსხვავება IFCA და IFCCA ოპერატორების აგრეგირების მახასიათებლებს შორის მრავალკრიტერიუმიან გადაწყვეტილების მიღების სისტემებში შესწავლილია (Wu, 2013). 2.1.12 და 2.2.2 განსაზღვრებებიდან ჩანს, რომ IFCCA ოპერატორი ემთხვევა ინტუიციონისტურ ფაზი შოკეს გეომეტრიულ ოპერატორს

$$(\bar{c})IFCA_g(\alpha_1,...,\alpha_n) = IFCG_g(\alpha_1,...,\alpha_n). \tag{2.2.29}$$

განსაზღვრება 2.2.3. დავუშვათ $F : L_{IFVs}^n \to L_{IFVs}$ არის ინტუიციონისტური ფაზი აგრეგირების ოპერატორი. F ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორი ეწოდება:

$$(\bar{c})F(\alpha_1,...,\alpha_n) = (F((\alpha_1)^c,...,(\alpha_n)^c)^c \tag{2.2.30}$$

$\forall\ \alpha_1,...,\alpha_n \in IFVs$ –თვის.

(2.2.29)–ის ანალოგიურად, ახალ აგებულ ოპერატორებს შორის გაგვაჩნია შეუღლებული კავშირები:

მტკიცებულება 2.2.11 (Sirbiladze, Khutsishvili, Badagadze, Tsulaia, 2018). $As-F_M$, $M \in \{\vee, \wedge\}$, $F \in \{P-IFWA, P-IFWG\}$ აგრეგირების ოპერატორებისთვის გვაქვს

$$(\bar{c})As-P-IFWA_{\vee}=As-P-IFWG_{\wedge}\ ,$$
$$(\bar{c})As-P-IFWA_{\wedge}=As-P-IFWG_{\vee}\ . \tag{2.2.31}$$

დამტკიცება: ჩვენ განვიხილავთ As-P-IFWA ოპერატორს. სხვა შემთხვევები ანალოგიური იქნება და არ განვიხილავთ. დავუშვათ მოცემულია $\forall\ \alpha_1,...,\alpha_n \in IFVs$. $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}),\ i=1,2,...,n$. გვაქვს

$$\begin{aligned}&(\bar{c})As-P-IFWA_{\vee}((\mu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_1}),...,(\mu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_1}))=\\&(As-P-IFWA_{\vee}((\mu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_1})^c,...,(\mu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_1})^c))^c=\\&(As-P-IFWA_{\vee}((\nu_{\alpha_1},\mu_{\alpha_1}),...,(\mu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_1})))^c.\end{aligned}$$

(2.2.23) განვიხილავთ $(\bar{c})As-P-IFWA_{\vee}$ ოპერატორისთვის, მაგრამ შეუღლებული არგუმენტებისთვის. (2.2.22) აღნიშვნების (2.2.23)-ში გამოყენებით შეგვიძლია შევიტანოთ არგუმენტებში შემდეგი ცვლილებები:

$$x_{\sigma^{(j)}(i)} \Leftrightarrow t_{\sigma^{(j)}(i)} \qquad y_{\sigma^{(j)}(i)} \Leftrightarrow z_{\sigma^{(j)}(i)}\ .$$

ამიტომ, ვიღებთ შემდეგ გარდაქმნებს:

$$\begin{aligned}&(\bar{c})As-P-IFWA_{\vee}((\mu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_1}),...,(\mu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_1}))=(As-P-IFWA_{\vee}((\nu_{\alpha_1},\mu_{\alpha_1}),...,(\mu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_1})))^c=\\&(S_{\max}[S_p(y_{\sigma^{(1)}(1)},...,y_{\sigma^{(1)}(n)}),...,S_p(y_{\sigma^{(n!)}(1)},...,y_{\sigma^{(n!)}(n)})],\\&T_{\min}[T_p(x_{\sigma^{(1)}(1)},...,x_{\sigma^{(1)}(n)}),...,T_p(x_{\sigma^{(n!)}(1)},...,x_{\sigma^{(n!)}(n)})])^c=\\&(T_{\min}[T_p(x_{\sigma^{(1)}(1)},...,x_{\sigma^{(1)}(n)}),...,T_p(x_{\sigma^{(n!)}(1)},...,x_{\sigma^{(n!)}(n)})],\\&S_{\max}[S_p(y_{\sigma^{(1)}(1)},...,y_{\sigma^{(1)}(n)}),...,S_p(y_{\sigma^{(n!)}(1)},...,y_{\sigma^{(n!)}(n)})])=As-P-IFWG_{\wedge}(\alpha_1,...,\alpha_n).\end{aligned}$$

ოთხი ახალი ინტუიციონისტური ფაზი ოპერატორი ქმნის ურთიერთშეუღლებულ ოპერატორთა წყვილებს. ურთიერთშეუღლებული ოპერატორების გავრცობები შესწავლილია ვიუს და სხვების მიერ (Wu, 2013) და შეგვიძლია ვთქვათ: MCDM-ის ამოცანებში ეს ორი ახალი წყვილი და შოკეს ურთიერთშეუღლებული ოპერატორები ასახავენ DMP-ების დამოკიდებულებას გადაწყვეტილების მიღების რისკებზე შესაძლო სპექტრში – ოპტიმისტურიდან პესიმისტურ რისკამდე.

2.3. $As - F_M$ ოპერატორების გამოყენება ბიზნეს-წამოწყების ტიპის ჯგუფური გადაწყვეტილების მიღების პროცესში

2.3.1. ბიზნეს -წამოწყების ტიპის გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის ფორმირება

კომპანია, რომელიც სარესტორნო ბიზნესის წარმოებით არის დაკავებული გეგმავს თავის კუთვნილებაში მყოფი 40 კვ. მეტრი ფართის ათვისებას ისე, რომ მაქსიმალურად იქნეს გათვალისწინებული კომპანიის ინტერესები. მენეჯერებმა წარმოადგინეს ახალი ბიზნეს–წამოწყების შემდეგი ხუთი ალტერნატივა:

d_1 – *ღვინის მაღაზია;*

d_2 – *სწრაფი კვების ობიექტი;*

d_3 – *სანაყინე და საკონდიტრო;*

d_4 – *ჩილიმ ბარი;*

d_5 – *გრილ კაფე;*

ზემოთ აღნიშნული ალტერნატივებიდან ერთის ამორჩევა არ არის მარტივი სამუშაო, რადგან ისინი დამოკიდებული არიან სხვადასხვა ურთიერმოქმედ ფაქტორებზე (კრიტერიუმებზე), რომლებიც ბუნებრივია კომპანიის ინტერესებიდან გამომდინარეობს. აღნიშნულია ფაქტორებია:

s_1 – საინვესტიციო თანხების მოცულობა;

s_2 – პროექტის შესრულების ვადები (დრო);

s_3 – ნულოვანი მოგებისთვის საჭირო შემოსავალი;

s_4 – შემოსავლის ფარდობითობა (ნულოვანი მოგებისთვის საჭირო შემოსავალისა და დაახლოებითი ინდუსტრიული შემოსავალის შეფარდება);

s_5 – ბიზნეს–პროცესებში განსწავლული კომპეტენტური პირების შეხედულებები;

2.3.2. ამოცანის ამოხსნის სქემა

ამოცანის ამოხსნის სქემა ჩამოყალიბდა შემდეგნაირად:

1. უნდა შეგროვდეს ინფორმაცია ფაქტორებისა/ატრიბუტებსა და ალტერნატივების შესახებ ისეთი წყაროებიდან, როგორიცაა ბიზნეს გეგმა, დარგის სპეციალისტების/კომპეტენტური პირების/ექსპერტების გამოკითხვა. ამ ინფორმაციის საფუძველზე ჩამოყალიბდება ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღების მეთოდი.

2. უნდა აიგოს პროექტის განხორციელების მონაცემთა მატრიცა. აღნიშნული მატრიცის ელემენტები უნდა იყოს ნამდვილი რიცხვები ან რიცხვითი ინტერვალები.

3. ექსპერტთა მიერ შეფასების შესახებ გადაწყვეტილების მიღების მატრიცის ფორმირება (წარმოდგენილი ინტუიციონისტურ ფაზი სიდიდეებში) პროექტის განხორციელების მონაცემთა მატრიცის გამოყენებით.

4. გადაწყვეტილების მიღების ახალი აგრეგირების ოპერატორების გენერირება, რომლებიც ალტერნატიული მონაცემების გადანაწილებას ახდენენ გადაწყვეტილების მიღების ინტუიციონისტურ ფაზი სიდიდეებში რანჟირების დონეების სახით.

5. გადაწყვეტილების მიღება ხდება ალტერნატივების რანჟირების შედეგად, მათი დონეების მეტობიდან ნაკლებობისკენ დალაგებით. საუკეთესო გადაწყვეტილებად მიიჩნევა უმაღლესი დონის მქონე ალტერნატივა.

2.3.3. ალტერნატივებზე მოქმედი ფაქტორების აღწერა

განვიხილოთ ალტერნატივა d_1– ღვინის მაღაზია. აღნიშნული ალტერნატივისთვის ფაქტორების მნიშვნელობები შემდეგნაირად გამოიყურება:

ფაქტორი s_1– საინვესტიციო თანხების მოცულობა*: 38 200 ლარი.* დამოკიდებულია ბიზნეს–გეგმაზე;

ფაქტორი s_2 – პროექტის შესრულების ვადები: *35 დღე. წარმოდგენილია სამშენებლო კომპანიის მიერ;* .

ფაქტორი s_3 – ნულოვანი მოგებისთვის საჭირო შემოსავალი: *6785.7 ლარი.* მოწოდებულია BEP- ის (Break Even Point) ეკონომიკური გათვლებით ბიზნეს–გეგმის მონაცემების საფუძველზე.

ფაქტორი s_4 – ნულოვანი მოგებისთვის საჭირო შემოსავალისა და დაახლოებითი ინდუსტრიული შემოსავალის შეფარდება: $\frac{R_0}{R_{ind}} = \frac{6785.7}{14000} \approx 0.485 \to 48.5\%$. ინფორმაცია გროვდება მსგავსი პროექტების ფინანსურ დოკუმენტაციაზე დაყრდნობით.

ფაქტორი s_5 – ბიზნეს–პროცესებში განსწავლული კომპეტენტური პირების შეხედულებები: ოთხი შეხედულება. ეს ინფორმაცია მოცემულია შემდეგი მეთოდით: გამოიკითხა 12 დამოუკიდებელი ექსპერტი, რომლებიც კონკრეტულ ალტერნატივას აძლევდნენ ქულას 1–დან 10–მდე იმის გათვალისწინებით, წარმოადგენს თუ არა კონკრეტული ალტერნატივა კარგ იდეას და შემდეგ გამოითვლება მონაცემების საშუალო.

იგივე სქემა გამოიყენება ფაქტორების მიხედვით სხვა დანარჩენი $(d_2; d_3; d_4; d_5)$ ალტერნატივების აღსაწერად და წარმოდგენილია მონაცემთა შემდეგი მატრიცის საშუალებით (ცხრილი 2.3.3.1):

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
d_1 – ღვინის მაღაზია	38 200	35	6785.7	48.5%	4
d_2 – სწრაფი კვების ობიექტი	56 000	50	17 885	44.7%	4.4
d_3 – სანაყინე და საკონდიტრო	41 200	45	8750	35%	5.3
d_4 – ჩილიმ ბარი	52 500	60	8625	23%	7.5
d_5 – გრილ კაფე	66 500	60	10 885	24%	6.1

ცხრილი 2.3.3.1. მონაცემთა მატრიცა.

ოთხი პიროვნება (გადაწყვეტილების მიმღები პირები - DMP) აფასებენ მონაცემებს ზემოთ მოცემული მატრიცაზე დაყრდნობით. შეფასება ხდება ინტუიციონისტურ ფაზი სიდიდეებში. DMP ასახავს ფაქტორების გავლენას და არ ახდენს გავლენას შესაძლო ალტერნატივებზე IFV–ის წყვილური დონეებით. შესაბამისი მატრიცა წარმოდგენილია შემდეგ ცხრილებში 2.3.3.2-2.3.3.5:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
d_1	(0.5, 0.3)	(0.8, 0.1)	(0.9, 0.0)	(0.9, 0.0)	(0.7, 0.3)
d_2	(0.5, 0.3)	(0.8, 0.1)	(0.7, 0.2)	(0.7, 0.3)	(0.5, 0.4)
d_3	(0.6, 0.4)	(0.6, 0.1)	(0.7, 0.2)	(0.9, 0.0)	(0.5, 0.4)
d_4	(0.7, 0.2)	(0.6, 0.1)	(0.5, 0.3)	(0.8, 0.2)	(0.7, 0.2)
d_5	(0.3, 0.4)	(0.7, 0.2)	(0.9, 0.1)	(0.7, 0.2)	(0.6, 0.3)

ცხრილი 2.3.3.2. შეფასების მატრიცა DMP1–ის მიხედვით.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
d_1	(0.7, 0.2)	(0.8, 0.1)	(0.7, 0.3)	(0.6, 0.3)	(0.5, 0.4)
d_2	(0.5, 0.3)	(0.6, 0.3)	(0.5, 0.4)	(0.3, 0.6)	(0.4, 0.6)
d_3	(0.9, 0.1)	(0.7, 0.1)	(0.7, 0.2)	(0.3, 0.6)	(0.3,0.5)
d_4	(0.6, 0.3)	(0.3, 0.5)	(0.4, 0.2)	(0.8, 0.2)	(0.7, 0.1)
d_5	(0.4, 0.2)	(0.4, 0.6)	(0.4, 0.4)	(0.7, 0.1)	(0.6, 0.3)

ცხრილი 2.3.3.3. შეფასების მატრიცა DMP2–ის მიხედვით.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
d_1	(0.6, 0.4)	(0.7, 0.1)	(0.8, 0.1)	(0.6, 0.3)	(0.3, 0.5)
d_2	(0.8, 0.1)	(0.9, 0.1)	(0.6, 0.4)	(0.7,0.2)	(0.6, 0.3)
d_3	(0.5, 0.3)	(0.7, 0.2)	(0.6, 0.3)	(0.3, 0.5)	(0.5, 0.6)
d_4	(0.4, 0.3)	(0.4, 0.6)	(0.8, 0.2)	(0.4, 0.3)	(0.4, 0.2)
d_5	(0.3, 0.6)	(0.4, 0.6)	(0.7, 0.1)	(0.6, 0.2)	(0.5, 0.2)

ცხრილი 2.3.3.4. შეფასების მატრიცა DMP3–ის მიხედვით.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
d_1	(0.7, 0.2)	(0.8, 0.0)	(0.5, 0.2)	(0.7, 0.2)	(0.5, 0.4)
d_2	(0.6, 0.3)	(0.7, 0.1)	(0.5, 0.3)	(0.7, 0.1)	(0.6, 0.2)
d_3	(0.6, 0.2)	(0.9, 0.1)	(0.7, 0.1)	(0.7, 0.2)	(0.3, 0.4)
d_4	(0.7, 0.1)	(0.6, 0.1)	(0.8, 0.1)	(0.9, 0.0)	(0.7, 0.3)
d_5	(0.3, 0.6)	(0.6, 0.1)	(0.7, 0.1)	(0.9, 0.1)	(0.6, 0.1)

ცხრილი 2.3.3.5. შეფასების მატრიცა DMP4–ის მიხედვით.

ექსპერტონების მეთოდი (Kaufmann, 1988) შეიცვალა გადაწყვეტილების მიღების შედეგების მატრიცაში ექსპერტების ინტუიციონისტური ფაზი ინფორმაციის დამუშავებისა და სინთეზის მიზნით, ბიზნეს–წამოწყების გადაწყვეტილების მიღების ამოცანაში შემდგომი გამოყენებისათვის.

2.3.4. ექსპერტონების მეთოდი

ამ კვლევაში ექსპერტონის მეთოდის გამოყენება (Kaufmann, 1988) საშუალებას აძლევს გადაწყვეტილების მიმღებ პირებს, დამოუკიდებლად შეაფასონ თითოეული გადაწყვეტილების თითოეული ფაქტორი, კონდენსირება გაუკეთენონ მონაცემებს და მიიღონ ოპტიმალური ერთობლივი შეფასება. ექსპერტონი წარმოადგენს ალბათობის განზოგადებას, როდესაც კუმულაციური ალბათობა შეიცვლება მონოტონურად კლებადი ინტერვალებით. ამ ინტერვალებს სტატისტიკურად განსაზღვრავს ექსპერტთა ჯგუფი - გადაწყვეტილების მიმღები პირები ანუ DMP–ები. ექსპერტონების მეთოდი განზოგადდა ინტუიციონისტური ფაზი გარემოსთვის.

ინტუიციონისტური ფაზი მონაცემების ექსპერტონების მეთოდის კონცეფცია მოკლედ აღიწერება შემდეგნაირად:

დავუშვათ D არის ყველა შესაძლო გადაწყვეტილების სიმრავლე (შესაძლო ალტერნატივები) და S არის შესაძლო ფაქტორების სიმრავალე (ბუნებრივი მდგომარეობზები) გადაწყვეტილების მიღების მოდელში. ექსპერტთა r ჯგუფს სთხოვენ გამოთქვან თავიანთი სუბიექტური აზრი თითოეული ფაქტორის S ფორმისთვის თითოეულ შესაძლო ალტერნატივაზე D სიმრავლიდან ინტუიციონისტური ფაზი სიდიდეების სახით:

$$\forall\, d \in D, s \in S : \alpha^{j}(d,s) = (\mu_{\alpha}^{j}(d,s), \nu_{\alpha}^{j}(d,s)),$$

სადაც l არის ექსპერტების რაოდენობა. დავუშვათ, რომ გვაქვს მონოტონური თავსებადი დონეების გარკვეული სიმრავლე: $0 \le e_1 < e_2 < \Lambda < e_{\lambda} \le 1$. ფიქსირებული (d,s)–თვის ჩვენ გავითვალისწინებთ სტატისტიკას - კუმულაციური განაწილების კანონს $F_{\mu_{\alpha}}(e;d,s)$ და $F_{\nu_{\alpha}}(e;d,s)$. შემდეგ, მივიღებთ

$$\forall\, d \in D, s \in S, \quad \forall e \in \{e_1,...,e_l\}: \quad \widetilde{A}(e;d,s) = (F_{\mu_{\alpha}}(e;d,s), F_{\nu_{\alpha}}(e;d,s)),$$

სადაც

$$F_{\mu_{\alpha}}(e;d,s) = \left(\sum_{j\,:\,\mu_{\alpha}^{j}(d,s)\ge e} 1\right)\Big/ r\,, \quad F_{\nu_{\alpha}}(e;d,s) = \left(\sum_{j\,:\,\nu_{\alpha}^{j}(d,s)\ge 1-e} 1\right)\Big/ r\,.$$

$\widetilde{A}$ აღნიშნავს e დონის ინტუიციონისტურ ფაზი ექსპერტონს d გადაწყვეტილებისა და s ბუნებრივი მდგომარეობის მიმართ. $d \in D, s \in S$ წყვილის ინტუიციონისტური ფაზი ექსპერტონი განისაზღვრება დონის ინტუიციონისტური ფაზი ექსპერტონთა საშუალოს მიხედვით:

$$\alpha(d,s) = (\mu_{\alpha}(d,s), \nu_{\alpha}(d,s)) = ((\sum_{i=1}^{\lambda} F_{\mu_{\alpha}}(e_i;d,s)/l,\ \sum_{i=1}^{\lambda} F_{\nu_{\alpha}}(e_i;d,s)/l)\ .$$

გადაწყვეტილების შედეგების მატრიცა იქმნება ინტუიციონისტური ფაზი ექსპერტონების $\{\alpha(d,s)\},\ d \in D,\ s \in S$ გასაშუალოებით.

2.3.5. გადაწყვეტილების მიღების პროცესის და რეალიზაციის შედეგები

მათემატიკური გამოთვლებით მიიღება გადაწყვეტილების შედეგების მატრიცა (იხ. ცხრილი 2.3.5.1):

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
d_1	(0.66, 0.34)	(0.80, 0.16)	(0.75, 0.23)	(0.73, 0.27)	(0.55, 0.45)
d_2	(0.64, 0.32)	(0.77, 0.23)	(0.61, 0.39)	(0.64, 0.36)	(0.57, 0.43)
d_3	(0.68, 0.30)	(0.75, 0.20)	(0.70, 0.27)	(0.59, 0.39)	(0.45, 0.52)
d_4	(0.64, 0.30)	(0.52, 0.39)	(0.66, 0.27)	(0.75, 0.25)	(0.66, 0.27)
d_5	(0.39, 0.50)	(0.57, 0.43)	(0.70, 0.25)	(0.75, 0.23)	(0.61, 0.30)

ცხრილი 2.3.5.1. გადაწყვეტილების შედეგების მატრიცა - ინტუიციონისტური ფაზი ექსპერტონების საშუალო.

განხილულ მაგალითში ფაზი ზომად გამოვიყენეთ მეორე რიგის ადიციური ფაზი ზომა (Grabisch, 1997). ამიტომ, ჩვენ საჭიროა შემოვიტანოთ რამდენიმე განსაზღვრება. ფაზი ზომის მთავარი მახასიათებელია არაადიციურობა (არადიციური სიმრავლის ფუნქცია (Pap, 1995)). MCDM–ში g ფაზი ზომის $g(A)$, $A \subseteq S$ მნიშვნელობა კრიტერიუმების S სიმრავლეზე შეიძლება განისაზღვროს, როგორც კრიტერიუმების A ქვესიმრავლის მნიშვნელობა, ხოლო ფაზი ზომის მონოტონურობა ნიშნავს, რომ კრიტერიუმების ქვესიმრავლის წონა არ შეიძლება შემცირდეს, როდესაც მას დაემატება ახალი კრიტერიუმები (Grabisch, 2008). ფაზი ზომა შეიძლება მოქნილად წარმოადგენდეს გარკვეული სახის ურთიერთქმედებას გადაწყვეტილების კრიტერიუმებს შორის და შეიძლება მერყეობდეს სიჭარბესა (ნეგატიური ურთიერთქმედება) სინერგიას (პოზიტიური ურთიერთქმედება) შორის (Grabisch, 2008).

განსაზღვრება 2.3.5.1 (Grabisch, 2008). დავუშვათ g არის სიმრავლის ფუნქცია (არ არის აუცილებელი იყოს ფაზი ზომა) $S = \{s_1, ..., s_n\}$ სიმრავლეზე. g –ის მობიუსის გარდაქმნა არის სიმრავლის ფუნქცია $m_g : 2^S \to R$ განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$m_g(A) = \sum_{B \subset A} (-1)^{|A \setminus B|} g(B), \quad \forall A \subset S, \qquad (2.3.5.1)$$

სადაც $|A|$ არის $A \subseteq S$ სიმრავლის კარდინალობა.

ცნობილია რომ, ნებისმიერი ფაზი ზომა (ნებისმიერი სიმრავლის ფუნქცია) g შეიძლება ცალსახად განისაზღვროს მისი მობიუსის წარმოდგენის ტერმინებში შემდეგნაირად:

$$g(A) = \sum_{B \subset A} m_g(B), \quad \forall A \subset S. \qquad (2.3.5.2)$$

განსაზღვრება 2.3.5.2 (Grabisch, 2008). დავუშვათ $k \in \{1,2,...,n\}$, g ფაზი ზომას S სიმრავლეზე ეწოდება $k-$რიგის ადიციური ზომა თუ მისი მობიუსის გარდაქმნა აკმაყოფილებს პირობას: $m_g(A) = 0$ ნებისმიერი $A \subset S$ ისე, რომ $|A| > k$ და არსებობს სულ მცირე ერთი ქვესიმრავლე $A \subset S$ ისეთი, რომ $m_g(A) \neq 0$.

უნდა აღინიშნოს, რომ 1–რიგის ადიციური ფაზი ზომა ემთხვევა ადიციურ ზომას. განსაზღვრება 2.3.5.2–დან ფაზი ზომა განისაზღვრება $\sum_{l=1}^{k}(C_n^l)$ კოეფიციენტებით. მაგალითად, ჩვენ გვჭირდება მხოლოდ $n(n+1)/2$ კოეფიციენტები, რომ განვსაზღვროთ 2–რიგის ადიციური ფაზი ზომა.

განსაზღვრება 2.3.5.3 (Grabisch, 2008). დავუშვათ g არის ფაზი ზომა S სიმრავლეზე.

1) $s_i \in S$ კრიტერიუმის/ატრიბუტის ზოგადი მნიშვნელოვნება (Overall Importance) ეწოდება შეიპლის სიდიდეს (Shapley Value) და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$I_i = \sum_{A \subset S \setminus \{s_i\}} [(|S| - |A| - 1)!/(|S|!)] \cdot [g(A \cup \{s_i\}) - g(A)], \qquad (2.3.5.3)$$

2) ორი $s_i, s_j \in S$ კრიტერიუმის/ატრიბუტის ინტერაქტიულობის, ურთიერთქმედების ინდექსი (Interactive Index) განისაზღვრება:

$$I_{ij} = \sum_{A \subset S \setminus \{s_i, s_j\}} [(|S| - |A| - 2)!/(|S|! - 1)] \cdot [g(A \cup \{s_i, s_j\}) - g(A \cup \{s_i\}) - g(A \cup \{s_j\}) + g(A)].$$

(2.3.5.4)

(2.3.5.3) ფორმულიდან ადვილიდან გამომდინარეობს, რომ $\sum_{i=1}^{n} I_i = 1$. 2–რიგის ადიციური ფაზი ზომისთვის გვაქვს

$$I_i = m_g(\{s_i\}) + (1/2) \cdot \sum_{s_j \in S \setminus \{s_i\}} m_g(\{s_i, s_j\}), \qquad I_{ij} = m_g(\{s_i, s_j\}), \qquad (2.3.5.5)$$

და $|A|>2$ –თვის ერთობლივი ინდექსები 0-ია: $I_A=0$. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით ადვილი დასამტკიცებელია, რომ 2–რიგის ადიციური ზომისათვის $\forall\sigma=\{\sigma(1),...,\sigma(n)\}\in S_n$ და $i=1,...,n$

$$g(\{s_{\sigma(1)},...,s_{\sigma(i)}\})=\sum_{l=1}^{i}I_{\sigma(l)}-(1/2)\cdot\sum_{k\in N_{\sigma(i)}}\sum_{l=1}^{i}I_{\sigma(i)l}\quad, \qquad (2.3.5.6)$$

სადაც $N_{\sigma(i)}$ აღნიშნავს ინდექსების ქვესიმრავლეს $N_{\sigma(i)}=\{1,\ldots,n\}\setminus\{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\}$. ფაზი ზომის ასოცირებული ალბათობების განსაზღვრის გამოყენებით (განსაზღვრება 2.1.8) ვიღებთ კავშირებს ასოცირებულ ალბათობებს, ატრიბუტების ზოგადი მნიშვნელოვნებებსა და ფაქტორების/კრიტერიუმების/ატრიბუტების წყვილური ურთიერთმოქმედების ინდექსს შორის:

$$P_\sigma\left(s_{\sigma(i)}\right)=I_i+(1/2)\cdot\sum_{l=1}^{i-1}I_{\sigma(i)\sigma(l)}-(1/2)\cdot\sum_{l=i+1}^{n}I_{\sigma(i)\sigma(l)}\ , \qquad (2.3.5.7)$$

სადაც თუ (2.3.5.7)–ში $i=1$, მაშინ მეორე შესაკრები არის ნულის ტოლი, ხოლო თუ $i=n$, მაშინ მესამე შესაკრებია ნული. ასოცირებული ალბათობის (2.3.5.7) წარმოსადგენად გვაქვს საინტერესო ინტერპრეტაცია ატრიბუტებს/კრიტერიუმებს/ფაქტორებს შორის ურთიერთქმედების წარმოდგენის თვალსაზრისით. განსაზღვრება 2.1.8–დან ნათლად ჩანს, რომ 2–რიგის ადიციური ფაზი ზომის ასოცირებული ალბათობა განისაზღვრება შემდეგი მონოტონური კონსონანტური სტრუქტურით:

$$\{s_{\sigma(1)}\},\ \{s_{\sigma(1)},s_{\sigma(2)}\},\ \ldots\ ,\{s_{\sigma(1)},s_{\sigma(2)},...,s_{\sigma(n)}\}\ .$$

მასასადამე (2.3.5.7)-ში დადებით როლში მონაწილეობენ $\{s_{\sigma(1)}\},\ \{s_{\sigma(1)},s_{\sigma(2)}\},\ \ldots\ ,\{s_{\sigma(1)},s_{\sigma(2)},...,s_{\sigma(i-1)}\}$ სტრუქტურის შესაბამისი ურთიერთქმედების ინდექსები, მაშინ როცა უარყოფით როლში მონაწილეობენ $\{s_{\sigma(i+1)}\},\ldots\ ,\{s_{\sigma(i+1)},...,s_{\sigma(n)}\}$ სტრუქტურის შესაბამისი ურთიერთქმედების ინდექსები. ამრიგად აიგება $n\times n!$ ალბათობები $n(n+1)/2$ ურთიერთქმედების ინდექსებით $J=\{I_{ij}\},\ i\neq j,\ I_{ij}=I_{ji}$ და n მნიშვნელოვნების (მასების, წონების) ($I=\{I_i\},\ i=1,...,n$) სიდიდეებით. ასოცირებული ალბათობის ასაგებად ექსპერტებმა შეაფასეს მნიშვნელოვნების სიდიდეებისა და ურთიერთქმედების ინდექსების მნიშვნელობები. ექსპერტებმა (DMP) ურთიერთშეთანხმების გზით შექმნეს კრიტერიუმების წონები,

როგორც ატრიბუტების/კრიტერიუმების მნიშვნელოვნების სიდიდეები:

$$I_1 = w_1 = 0.25;\ \ I_2 = w_2 = 0.15;\ \ I_3 = w_3 = 0.25;\ \ I_4 = w_4 = 0.20;\ \ I_5 = w_5 = 0.15.$$

ასევე ურთიერთშეთანხმების საფუძველზე ექსპერტებმა წარმოადგინეს ატრიბუტთა/ფაქტორთა/კრიტერიუმების წყვილური ურთიერთქმედების ინდექსების მატრიცა (იხ. ცხრილი ცხრილი 2.3.5.2).

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	I_i
s_1	-	0.05	0.12	0.12	0.10	0.25
s_2	0.05	-	0.08	0.08	0.08	0.15
s_3	0.12	0.08	-	0.12	0.05	0.25
s_4	0.12	0.08	0.12	-	0.07	0.20
s_5	0.10	0.08	0.05	0.07	-	0.15

ცხრილი 2.3.5.2. კრიტერიუმის ურთიერთქმედების ინდექსების მატრიცა.

შესაძლო ალტერნატივების რანჟირებისთვის ვიყენებთ As-P-IFWA და As-P-IFWG ოპერატორებს. (2.3.5.7) –ის გამოყენებით ვითვლით 2–რიგის ადიციური ფაზი ზომის APC–ს (ასოცირებული ალბათური განაწილების რიცხვი 5!=120). (2.2.9)-(2.2.12) ფორმულების გამოყენებით ვითვლით $As-F_M$ $(\beta = 0.7)$ ოპერატორის მნიშვნელობებს. ასევე შედარების მიზნით გამოითვლება IFWA და IFWG ოპერატორების მნიშვნელობები (Xu, 2007, 2008). უნდა აღინიშნოს, რომ აგებული 2–ადიციური ფაზი ზომა არ წარმოადგენს მეორე რიგის ტევადობას. მტკიცებულება 2.2.5–ზე დაყრდნობით, უნდა გვქონდეს განსხვავება IFCA (IFCG) სიდიდეებსა და As-P-IFWA (As-P-IFWG) ოპერატორების მნიშვნელობებს შორის (იხ. ცხრილი 2.3.5.3).

აგრეგირების ოპერატორები	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
IFWA	(0.710, 0.274)	(0.647, 0.342)	(0.654, 0.315)	(0.658, 0.288)	(0.621, 0.326)
IFWG	(0.696, 0.294)	(0.639, 0.351)	(0.635, 0.337)	(0.648, 0.293)	(0.582, 0.353)
IFCA	(0.693, 0.297)	(0.622, 0.376)	(0.604, 0.366)	(0.685, 0.270)	(0.676, 0.275)
IFCG	(0.675, 0.318)	(0.617, 0.381)	(0.581, 0.391)	(0.678, 0.272)	(0.658, 0.286)
$As-P-IFWA_{\vee}$	(0.703, 0.290)	(0.635, 0.365)	(0.624, 0.350)	(0.680, 0.275)	(0.667, 0.289)
$As-P-IFWA_{\wedge}$	(0.693, 0.296)	(0.628, 0.369)	(0.612, 0.358)	(0.673, 0.279)	(0.654, 0.295)
$As-P-IFWG_{\vee}$	(0.685, 0.306)	(0.628, 0.368)	(0.600, 0.371)	(0.671, 0.277)	(0.645, 0.299)
$As-P-IFWG_{\wedge}$	(0.675, 0.318)	(0.621, 0.376)	(0.588, 0.384)	(0.663, 0.283)	(0.628, 0.314)

ცხრილი 2.3.5.3. ოთხი ახალი $As-F_M$ ოპერატორისა და IFWA, IFWG, IFCA, IFCG ოპერატორების მიერ აგრეგირებული საერთო შეფასებები.

სრული დალაგების მიმართება $\geq_t$ წარმოშობს რანჟირების დალაგების მიმართებას $\succcurlyeq$ ყველა შესაძლო ალტერნატივებზე:

$$d_i \succcurlyeq d_j \ \Leftrightarrow As - F_M(d_i) \geq_t As - F_M(d_j)$$ (იხ. ცხრილი 2.3.5.4).

აგრეგირების ოპერატორები	რანჟირებული დალაგება
IFWA	$d_1 \phi\, d_4 \phi\, d_3 \phi\, d_2 \phi\, d_5$
IFWG	$d_1 \phi\, d_4 \phi\, d_3 \phi\, d_2 \phi\, d_5$
IFCA	$d_4 \phi\, d_5 \phi\, d_1 \phi\, d_2 \phi\, d_3$
IFCG	$d_4 \phi\, d_5 \phi\, d_1 \phi\, d_2 \phi\, d_3$
$As-P-IFWA_{\vee}$	$d_1 \phi\, d_4 \phi\, d_5 \phi\, d_3 \phi\, d_2$
$As-P-IFWA_{\wedge}$	$d_1 \phi\, d_4 \phi\, d_5 \phi\, d_2 \phi\, d_3$
$As-P-IFWG_{\vee}$	$d_4 \phi\, d_1 \phi\, d_5 \phi\, d_2 \phi\, d_3$
$As-P-IFWG_{\wedge}$	$d_4 \phi\, d_1 \phi\, d_5 \phi\, d_2 \phi\, d_3$

ცხრილი 2.3.5.4. აგრეგაციის ოპერატორების მიერ განსაზღვრული რანჟირებული დალაგება დაფუძნებული $\succcurlyeq$ მიმართებაზე

ცხრილი 2.3.5.4 გვიჩვენებს, რომ კარგად ცნობილი IFWA, IFWG, IFCA და IFCG ოპერატორების შედეგები წარმოადგენს $As-F_M$ ოპერატორების შედეგების კონკრეტულ შემთხვევებს. ოპტიმალური გადაწყვეტილებები შეიძლება იყოს d_4 (ჩილიმ ბარი) ან d_1 (ღვინის მაღაზია). როგორც მოსალოდნელი იყო სხვადასხვა შედეგებს იღებენ შეუღლებული $As-F_M$ ოპერატორები, მაგრამ არ შეგვიძლია ამის მოთხოვნა IFWA და IFWG შეუღლებული ოპერატორებისთვის, რადგან ფაქტორების/ატრიბუტების ურთიერთქმედება არ არის გათვალისწინებული. იგივე ეხება IFCA და IFCG შერწყმულ ოპერატორებს, რადგან ფაქტორების ურთიერთქმედება მხოლოდ ნაწილობრივ განიხილება. დასასრულს, შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ შედეგები მიუთითებს $As-F_M$ ოპერატორების შესაძლებლობაზე გაითვალისწინოთ DMP–ის განსაკუთრებული ინტერესები გადაწყვეტილების რისკებთან მიმართებაში.

ამრიგად, დისერტაციის *მეორე თავში აგებული* იქნა ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი წონითი გასაშუალოების (P-IFWA) და ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი წონითი გეომეტრიული (P-IFWG) ოპერატორების ახალი განზოგადოებები $-As-F_M$, $F \in \{P-IFWA, P-IFWG\}$, $M \in \{\vee, \wedge\}$, სადაც

განუზღვრელობა წარმოდგენილია ფაზი ზომის სახით. განისაზღვრა ახალი ოპერატორები ფაზი ზომის ასოცირებული ალბათობების კლასთან (APC) მიმართებაში. არსებობს $As-F_M$ ოპერატორთა გამოსახულების ოთხი ვარიანტი კონკრეტული ინტუიციონისტური მოქმედებებისათვის - ინტუიციონისტური მინიმუმი და მაქსიმუმი კონკრეტული ფაზი ზომის მიმართ.

მტკიცებულებები განზოგადოებების კორექტულობის შესახებ დამტკიცებულია. 1. $As-F_M$ ოპერატორები ფაზი ზომისთვის - მეორე რიგის ტევადობა, ემთხვევა ინტუიციონისტური ფაზი შოკეს გასაშუალოების (IFCA) ან ინტუიციონისტური ფაზი შოკეს გეომეტრიულ (IFCG) ოპერატორებს; 2. $As-F_M$ ოპერატორები ემთხვევა ინტუიციონისტური ფაზი ალბათური გასაშუალოების (IFPA) ან ინტუიციონისტური ფაზი ალბათური გეომეტრიულ (IFPG) ოპერატორებს, როდესაც ალბათური ზომა გამოიყენება ფაზი ზომის როლში.

დასკვნის სახით ვიტყვით, *შოკეს გასაშუალების აგრეგაციისგან განსხვავებით, აგებული ოპერატორები და მათი შერწყმული ოპერატორები საშუალებას გვაძლევს გავუმკლავდეთ ურთიერთქმედებას ყველა ატრიბუტს შორის* (კრიტერიუმს შორის) ინტუიციონისტურ ფაზი MCDM/MADM –ის ამოცანებში.

განხილულია საილუსტრაციო მაგალითი ახალი $As-F_M$ ოპერატორების ფაზი ჯგუფური გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებში გამოყენების მიზნით. რისკების შფასებებეი ამ მიდგომამ მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა ბიზნეს–წამოწყების მენეჯმენტში. რისკის შეფასებები ჩვეულებრივ გამოიყენება ბიზნეს–წამოწყების პრობლემური საკითხების იდენტიფიცირების პროცესში. განხორციელდა IFWA, IFWG, IFCA და IFCG ოპერატორების მნიშვნელობების შედარება $As-F_M$ ოპერატორების მნიშვნელობებთან. შედეგები მიუთითებს $As-F_M$ ოპერატორების შესაძლებლობაზე გაითვალისწინონ კონკრეტულ ამოცანაში გადაწყვეტილების რისკების შესახებ DMP–ების განსაკუთრებული ინტერესები, მომხმარებლის განწყობაზე პესიმიზმიდან დაწყებული ოპტიმიზმით დამთავრებული.

თავი III. ობიექტების განთავსება-შერჩევის ამოცანის TOPSIS მიდგომა პითაგორული ფაზი გარემოსთვის

პითაგორულ ფაზი სიმრავლეს (PFS – Pythagorean Fuzzy Sets) აქვს ბევრად უფრო ძლიერი უნარი, ვიდრე ინტუიციურ ფაზი სიმრავლეს (IFS- Intuitionistic Fuzzy Set), მართოს რეალურ სამყაროში მრავალკრიტერიუმთან დაკავშირებული გადაწყვეტილების მიღების ამოცანები. ამ თავში წარმოდგენილია პითაგორული ფაზი TOPSIS მიდგომა ექსტრემალურ გარემოში ობიექტის განთავსება-შერჩევის დაგეგმვის ამოცანაში პარამეტრების შესახებ ექსპერტული ცოდნის ფორმირებისა და წარმოდგენის მიზნით. ამ მიდგომაში შემოთავაზებულია შეფასების ფუნქციაზე (Score Function) დაფუძნებული შედარების მეთოდი, რათა დადგინდეს პითაგორული ფაზი დადებითი იდეალური ამონახსნი და პითაგორული ფაზი უარყოფითი იდეალური ამონახსნი. აგებულ ფაზი TOPSIS-ის აგრეგირებებზე დაყრდობით ფორმულირდება ახალი მიზნობრივი ფუნქცია. შესაბამისი კრიტერიუმი მაქსიმალურად ზრდის ექსტრემალურ სიტუაციებში კატასტროფის ზონებში დახმარების პუნქტებისთვის მომსახურე ცენტრების განთავსება-შერჩევის დაგეგმვის საიმედოობას. ეს კრიტერიუმი მეორე კრიტერიუმთან ერთად - შერჩეული ცენტრების რაოდენობის მინიმიზაცია - ქმნის მრავალ კრიტერიუმიანი ობიექტების განთავსების სიმრავლური დაფარვის ამოცანას. ამ მიდგომით მიღებული შედეგების ილუსტრირებისთვის წარმოდგენილია შემდეგი დაგეგმარების ამოცანა: საქართველოს ქალაქებში სასწრაფო დახმარების ობიექტების განთავსება-შერჩევის დაგეგმვის სიმულაციური მაგალითი. უფრო ზუსტად, მაგალითში მოცემულია ხანძარსაწინააღმდეგო სადგურების ადგილმდებარეობების დაგეგმვის ამოცანა, სპეციფიკური მოთხოვნის წერტილებში საგანგებო სიტუაციების მოსაწყობად - მნიშვნელოვან ინფრასტრუქტურულ ობიექტებში.

მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების (MCDM – Multi-criteria Decision Making) ამოცანა არის ოპტიმალური ალტერნატივის კონსტრუირების მიდგომა, რომელიც მაღალ ხარისხით უზრუნველყოფს შესაძლო ალტერნატივების სიმრავლიდან გარკვეული აზრით საუკეთესოს შერჩევას, ან მათ რანჟირებას. MCDM–ის მოდელები გამოირჩევა მრავალი კრიტერიუმის არსებობით, რომელთა გამოყენება

ფართოდაა გავრცელებული სხვადასხვა დარგისა თუ ტიპის რეალურ სამყაროს დაგეგმარების პრობლემების გადაწყვეტაში. თუ გავითვალისწინებთ ადამიანის პრეფერენციათა თანდაყოლილ ბუნდოვანებას, აგრეთვე რთულ და კომპლექსურ გარემოში მოდელის ობიექტების ფაზი და განუზღვრელ ბუნებას, ბელმანმა და ზადემ (Bellman & Zadeh, 1970) წარმოადგინეს ფაზი სიმრავლეთა თეორიის გამორჩეული ასპექტები და მიმართულებები MCDM-ის პრობლემატიკაში. ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ევრისტიული ტექნიკა - დავალაგოთ უპირატესობები იდეალური გადაწყვეტილების მისაღებად (TOPSIS – Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) აგებული იქნა 1981 წელს ჰვანგისა და იუნის (Hwang & Yoon, 1981) მიერ. მიდგომა დაფუძნებული იქნა მრავალკრიტერიუმიანი/მრავალატრიბუტული გადაწყვეტილებების მიღების (MCDM / MADM) კლასიკურ ამოცანებზე. იგი წარმოადგენს ალტერნატივების რანჟირებისა და შერჩევის მეტად პრაქტიკულ და სასარგებლო ტექნიკას. TOPSIS–ში გამოყენებული ძირითადი პრინციპია - შერჩეულ ალტერნატივას უნდა ჰქონდეს უმოკლეს მანძილი დადებით იდეალურ ამონახსნამდე (PIS – Positive Ideal Solution) და ყველაზე უფრო შორს იყოს უარყოფით იდეალურ ამონახსნთან (NIS – Negative Ideal Solution). არსებობს უამრავი ლიტერატურა, რომელიც მოიცავს TOPSIS-ის თეორიასა და გამოყენებებს. TOPSIS-ის კლასიკურ მეთოდებში ხშირად რიცხვითი მნიშვნელობები გამოიყენება კრიტერიუმების/ატრიბუტების წონების რიცხვითი შეფასებისთვის (Khutsishvili, Sirbiladze, Tsulaia, 2015; Tsulaia, 2020). DMP-ის უპირატესობის მნიშვნელობები და კრიტერიუმების/ატრიბუტების წონა ხშირად ორაზროვანია და არ შეიძლება წარმოდგენილი იყოს რეალურ ცხოვრებაში სიტუაციური თვალსაზრისით. ადამიანის მიერ უპირატესობის შესახებ წარმოდგენილ ინფორმაციაში ხშირად შექმნილი ბუნდოვანი ბუნების აღმოსაფხვრელად ფაზი სიმრავლეთა თეორია წარმატებით იქნა გამოყენებული გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებში არსებული უზუსტობისა და განუზღვრელობის მოდელირებისთვის. ამ თავში შემუშავებულია ახალი გადაწყვეტილების მიღების TOPSIS მიდგომა, რომელიც ეფექტურად გაუმკლავდება პითაგორული ფაზი სიმრავლეებით წარმოდგენილ ექსპერტულ შეფასებებს MCDM-ის ამოცანებისთვის.

ინტუიციონისტური ფაზი სიმრავლე (IFS-Intuitionistic Fuzzy Set) წარმოდგენილ იქნა ათანასოვის (Atanassov, 1986) მიერ როგორც ზადეს ფაზი სიმრავლის (FS– Fuzzy Set) განზოგადება. იმის გამო, რომ IFS-ის თითოეული ელემენტი, როგორც ინტუიციონისტური ფაზი რიცხვი (IFN–-Intuitionistic Fuzzy Number) (μ,υ) წარმოდგენილია მიკუთვნების ხარისხით (μ), არა-მიკუთვნების ხარისხით (υ) და ჰესიტანტური ხარისხით $(1-\mu-\upsilon)$, IFS უფრო ძლიერია განუზღვრელობასთან და უზუსტობასთან გამკლავებაში, ვიდრე FS. IFS– ის თეორია ფართოდ იქნა შესწავლილი და გამოყენებულია სხვადასხვა სფეროებში. მაგრამ IFN–ს (μ,υ) აქვს მნიშვნელოვანი შეზღუდვა - მიკუთვნების და არამიკუთვნების ხარისხების ჯამი ტოლია ან ნაკლები 1-ზე. ზოგიერთ შემთხვევაში, გადაწყვეტილების მიმღებმა პირმა (Decision Making Person (DMP)) შეიძლება მიაწოდოს მონაცემები ზოგიერთი ატრიბუტის შესახებ, სადაც ორი ხარისხის ჯამი 1-ზე მეტი იქნება $(\mu+\upsilon>1)$. იაგერმა (Yager, 2013; 2014) წარმოადგინა პითაგორული ფაზი სიმრავლე (PFS- Pythagorean Fuzzy Set), როგორც IFS–ის გაფართოება, სადაც პითაგორული ფაზი რიცხვის (PFN- Pythagorean Fuzzy Number) (μ,υ) წყვილს აქვს ნაკლებად მნიშვნელოვანი შეზღუდვა - მიკუთვნების ხარისხების კვადრატული ჯამი 1-ზე ნაკლებია ან ტოლი $(\mu^2+\upsilon^2\le 1)$. ზოგადად, პრაქტიკულ ამოცანებში, PFS–ს შეუძლიათ იპოვონ მნიშვნელოვანი ამონახსნები, რომლებიც IFS– ებმა ვერ იპოვეს. ამრიგად, PFS– ებს უფრო მეტად შეუძლიათ გაურკვეველი ინფორმაციის დამუშავება და გადაწყვეტილების მიღებასთან დაკავშირებული რთული პრობლემების გადაჭრა.

განსაზღვრება 3.1 (Yager, 2017; 2018). დავუშვათ გვაქვს ფიქსირებული ჩვეულებრივი სიმრავლე. q-რანგის ორთოწყვილური ფაზი სიმრავლე განისაზღვრება, როგორც მიკუთვნების ხარისხები:

$$A=\{\langle s,\mu_A(s),\nu_A(s)\rangle / s\in S\}, \qquad (3.1)$$

სადაც $\mu_A(s)$ ფუნქცია განსაზღვრავს მხარდაჭერას s-ის A-ში მიკუთვნების თაობაზე და $\nu_A(s)$ მიუთითებს მხარდაჭერას s-ის A-ში არა-მიკუთვნების თაობაზე, სადაც

$$q\ge 1,,\ 0\le\mu_A(s)\le 1,\ \ 0\le\nu_A(s)\le 1,\ 0\le(\mu_A(s))^q+(\nu_A(s))^q\le 1. \qquad (3.2)$$

$Hes_q(s) = (1-((\mu_A(s))^q + (\nu_A(s))^q)^{1/q}$ უწოდებენ ჰესიტანტურად ასოცირებულს q-რანგის ორთოწყვილურ მიკუთვნების ხარისხებთან $(q \geq 1)$ და $Str_q(s) = ((\mu_A(s))^q + (\nu_A(s))^q)^{1/q}$ უწოდებენ მიმაგრების ძალას, რომელიც ნაჩვენებია q-ში.

(Yager, 2017)-ში იაგერმა აჩვენა, რომ ათანასოვის ინტუიციური ფაზი სიმრავლე (Atanassov, 1986) არის q=1 -რანგის ორთოწყვილური და იაგერის პითაგორული ფაზი სიმრავლე (Yager, 2013) არის q=2-რანგის ორთოწყვილური ფაზი სიმრავლე. მოხერხებულობისთვის, ავტორები თითოეული $s \in S$ -თვის უწოდებენ $\alpha = \langle s, \mu_\alpha(s), \nu_\alpha(s) \rangle$-ს q-რანგის ორთოწყვილურ ფაზი რიცხვს (q-ROFN – q-rung Orthopair Fuzzy Number) , რომელიც აღნიშნიშნება $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$ ფორმით. სამომავლოდ ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ პითაგორულ ფაზი სიმრავლეებს.

განსაზღვრება 3.2 (Yager, 2013). დავუშვათ $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$ არის PFN.

ა) α-ს ქულების ფუნქცია Sc განისაზღვრება როგორც: $Sc(\alpha) = \mu_\alpha^2 - \nu_\alpha^2$; (3.3)

ბ) α-ს სიზუსტის ფუნქცია Ac განისაზღვრება როგორც: $Ac(\alpha) = \mu_\alpha^2 + \nu_\alpha^2$. (3.4)

განსაზღვრება 3.3 (Yager, 2013). დავუშვათ $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$ და $\beta = (\mu_\beta, \nu_\beta)$ არის ორი პითაგორული ფაზი რიცხვი (PFN), ხოლო $Sc(\alpha), Sc(\beta)$ ქულების და $Ac(\alpha), Ac(\beta)$ სიზუსტის ფუნქციები α-ს და β-ს შესაბამისად, მაშინ

ა) თუ $Sc(\alpha) > Sc(\beta)$, მაშინ $\beta < \alpha$;

ბ) თუ $Sc(\alpha) = Sc(\beta)$, მაშინ

თუ $Ac(\alpha) > Ac(\beta)$, მაშინ $\beta < \alpha$;

თუ $Ac(\alpha) = Ac(\beta)$, მაშინ $\beta = \alpha$. (3.5)

განვმარტოთ ძირითადი არითმეტიკული ოპერაციები პითაგორულ რიცხვებზე:

განსაზღვრება 3.4 (Yager, 2013). დავუშვათ პითაგორული ფაზი რიცხვებისთვის თუ $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$, α_1, α_2 პითაგორული რიცხვებია, მაშინ:

1. $\alpha^c = (\nu_\alpha, \mu_\alpha)$;
2. $\alpha_1 \oplus \alpha_2 = \left((\mu_{\alpha_1}^2 + \mu_{\alpha_2}^2 - \mu_{\alpha_1}^2 \cdot \mu_{\alpha_2}^2)^{1/2}, \nu_{\alpha_1} \cdot \nu_{\alpha_2}\right)$;
3. $\alpha_1 \otimes \alpha_2 = \left(\mu_{\alpha_1} \cdot \mu_{\alpha_2}, (\nu_{\alpha_1}^2 + \nu_{\alpha_2}^2 - \nu_{\alpha_1}^2 \cdot \nu_{\alpha_2}^2)^{1/2}\right)$;
4. $Min(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\min(\mu_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_2}), \max(\nu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_2})\right)$; (3.6)

5. $Max(\alpha_1,\alpha_2)=\left(\max\left(\mu_{\alpha_1},\mu_{\alpha_2}\right),\min\left(\nu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_2}\right)\right)$;

6. $\lambda\cdot\alpha=\left((1-(1-\mu_\alpha^2)^\lambda)^{1/2},\nu_\alpha^\lambda\right),\quad \lambda>0$;

7. $\alpha^\lambda=\left(\mu_\alpha^\lambda,(1-(1-\nu_\alpha^2)^\lambda)^{1/2}\right),\quad \lambda>0$.

ჩვენ განვსაზღვრავთ მანძილს პითაგორულ ფაზი α_1,α_2 რიცხვებს შორის როგორც (Tsulaia, 2020):

$$d(\alpha_1,\alpha_2)=1/2\cdot\left(\left|(\mu_{\alpha_1})^2-(\mu_{\alpha_2})^2\right|+\left|(\nu_{\alpha_1})^2-(\nu_{\alpha_2})^2\right|\right). \tag{3.7}$$

რთული საჩვენებელი არ არის ის, რომ ეს ზომა აკმაყოფილებს მანძილის ფუნქციის ყველა თვისებას.

3.1. TOPSIS მიდგომის აღწერა ობიექტის განთავსება-შერჩევის ამოცანისათვის პითაგორული ფაზი ინფორმაციის გარემოში

კანდიდატი მომსახურობის ცენტრების განთავსება-შერჩევის ოპტიმალური დაგეგმვა უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა ექსტრემალურ გარემოში კატასტროფული დაზიანებების შედეგად დახმარების უზნებთან სწრაფი კომუნიკაციისა და ტრაფიკის შემცირების მიზნით. ბოლო წლების განმავლობაში სატრანსპორტო საქმიანობა საოცრად გაიზარდა და ამან უდავოდ იმოქმედა მოგზაურობასა და ცხოვრების პირობებზე რთულ და ექსტრემალურ ტერიტორიაზე. თუ გავითვალისწინებთ სატვირთო გადაადგილების რაოდენობის ზრდას და მათ უარყოფით გავლენას მაცხოვრებლებზე და გარემოზე, მუნიციპალური ადმინისტრაციული მმართველობითი ორგანოები ახორციელებენ სატვირთო გადაადგილების მდგრად რეგულაციებს, როგორიცაა შეზღუდული მიწოდების დრო, სპეციალური მიწოდების ზონები და ა.შ. ამ რეგულაციების შესრულებით ლოჯისტიკური ოპერატორები დგანან სერვის-ცენტრების ადგილმდებარეობის დაგეგმვის ახალი გამოწვევების წინაშე. მაგალითად, თუ სერვის-ცენტრები განლაგებულია მომხმარებელთა ადგილმდებარეობის მახლობლად, მაშინ ისინი გაზრდიან მოძრაობის მოთხოვნას ურბანულ ადგილებში. თუ ისინი მდებარეობენ მომხმარებლის მდებარეობისგან შორს, მაშინ ოპერატორებისთვის მომსახურების ღირებულება ძალიან მაღალია. ამ პირობებში აშკარაა, რომ ექსტრემალურ გარემოში სერვის-ცენტრების

ადგილმდებარეობის დაგეგმვა არის რთული გადაწყვეტილება, რომელიც გულისხმობს მრავალი ატრიბუტის გათვალისწინებას, როგორიცაა მაქსიმალური მომხმარებლის დაფარვა, მინიმალური მომსახურება, მინიმალური გავლენა გეოგრაფიული პუნქტების მაცხოვრებლებზე და გარემოზე, შესაბამისობა ამ პუნქტების სატვირთო რეგულაციებთან.

გადაუდებელი დახმარების ცენტრებიდან დაზარალებულ გეოგრაფიულ რაიონებამდე დროული მომსახურება (მოთხოვნის წერტილები, როგორც მომხმარებლები, მაგალითად, კრიტიკული ინფრასტრუქტურის ობიექტები) საგანგებო სიტუაციების მართვის სისტემის მთავარი ამოცანაა. ამ სფეროში სამეცნიერო კვლევა ფოკუსირებულია დისტრიბუციულ ქსელებზე გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებზე, რომლებიც ცნობილია როგორც ობიექტის განთავსების ამოცანა (FLP– Facility Location Problem) (Daskin, 2013). FLP–ს მოდელები ემსახურება კომპლექსურ და განუზღვრელ გარემოში მომსახურების ცენტრების ოპტიმალური მდებარეობების განსაზღვრის საკითხს. არსებობს მრავალი სამეცნიერო პუბლიკაცია FLP–ში ფაზი მეთოდების გამოყენებასთან დაკავშირებით. ამასთან, ყველა მათგანს საერთო მიდგომა აქვს. ისინი წარმოადგენენ პარამეტრებს, როგორც ფაზი მნიშვნელობებს (სამკუთხა ფაზი რიცხვები (Dubois & Prade, 1988) და სხვ.) და ამუშავებენ ობიექტების განთავსების პრობლემატიკის მეთოდებს. თუ ობიექტები ფაზია, მაშინ საქმე გვაქვს ფაზი განთავსების ამოცანასთან (FFLP– Fuzzy Facility Location Problem). ფაზი TOPSIS მიდგომები ობიექტის განთავსება-შერჩევის პრობლემასთან დაკავშირებით სხვადასხვა ფაზი გარემოში ვითარდება სხვადასხვა ავტორის კვლევებში (Chu, 2002; Jahanshahloo, Hosseinzadeh, Izadikhah, 2006; Wang & Lee, 2007; Yong, 2006; Sirbiladze, Ghvaberidze, Matsaberidze, Sikharulidze, 2017; Zhang & Xu, 2014).

ამ თავში *განხილულია FFLP-ს ახალი მოდელი,* რომელიც დაფუძნებულია პითაგორული ფაზი TOPSIS მიდგომაზე, მომსახურეობის ცენტრების განთავსების ოპტიმალური შერჩევისთვის. მიმდინარე ნაწილში წარმოგიდგენთ MCDM-ის ამოცანას პითაგორულ განუზღვრელ გარემოში. შემდეგ კი შემოთავაზებულია გადაწყვეტილების მიღების ეფექტური მიდგომა MCDM ამოცანებთან გასამკლავებლად. დასასრულს, ასევე წარმოდგენილია შემოთავაზებული მეთოდის ალგორითმი.

თავდაპირველად, ყურადღება უნდა მივაქციოთ გადაწყვეტილების მიღების მრავალ ატრიბუტულ მიდგომას განუზღვრელ და ექსტრემალურ გარემოში მომსახურების ცენტრების განთავსება-შერჩევის დაგეგმვისთვის. აიგება ფაზი მრავალ ატრიბუტული გადაწყვეტილების მიღების მიდგომა მომსახურების ცენტრის ადგილმდებარეობის შერჩევის პრობლემისთვის, რისთვისაც გამოიყენება ფაზი TOPSIS მიდგომა.

ექსპერტთა შემავალი მონაცემების ფორმირება - პითაგორულ რიცხვებში წარმოდგენილი კანდიდატი ცენტრების (სერვის ცენტრების) ექსპერტული შეფასებები მათ შერჩევითობაზე მოცემულ ატრიბუტებთან მიმართებაში მნიშვნელოვან ამოცანას წარმოადგეს სერვის-ცენტრების ადგილმდებარეობის დასადგენად. ჩვენი მოდელის დაშვებებში ვვარაუდობთ, რომ კანდიდატთა წერტილების სიმრავლე (CSS– Candidate Site Set) უკვე არსებობს და იგი აღინიშნება როგორც $CS=\{cs_1, cs_2,..., cs_m\}$, სადაც ჩვენ შეგვიძლია განვათავსოთ სერვის-ცენტრები და $S=\{s_1, s_2,..., s_n\}$ იყოს ყველა იმ ატრიბუტების სიმრავლე (გარდაიქმნილი სარგებლიანობის ტიპის ატრიბუტებში), რომელიც განსაზღვრავს CS–დან სერვის ცენტრების შერჩევას. მაგალითად: ”საზოგადოებრივი და სპეციალური სატრანსპორტო რეჟიმების დაშვება კანდიდატი წერტილის ადგილამდე”, ”კანდიდატი წერტილის უსაფრთხოება უბედური შემთხვევებისგან, ქურდობისა და ვანდალიზმისგან დასაცავად”, ”ადგილმდებარეობის დაკავშირება ტრანსპორტირების სხვა საშუალებებთან (გზატკეცილები, რკინიგზა, პორტები, აეროპორტები და ა.შ.) და ა.შ.)", "ავტომობილების რესურსების, საჭირო პროდუქტებისა და ა.შ. ხარჯები კანდიდატი წერტილის ადგილმდებარეობისთვის", "კანდიდატი წერტილის გავლენა გარემოზე, როგორიცაა კრიტიკული ინფრასტრუქტურის მნიშვნელოვანი ობიექტები, ჰაერის დაბინძურება და სხვა", "კანდიდატი წერტილის ადგილმდებარეობის ცენტრალურ მდებარეობამდე სიახლოვე", "მომხმარებელთა მიერ კანდიდატი წერტილის ადგილმდებარეობის სიახლოვე", "ნედლეულის და შრომითი რესურსების ხელმისაწვდომობა კანდიდატ წერტილზე", "მენეჯმენტის მიერ დაწესებული მდგრადი სატვირთო რეგულაციების შესაბამისობის შესაძლებლობა. მაგალითად შეზღუდული მიწოდების საათები,

სპეციალური მიწოდების ზონები”, ”ზომის გაზრდის შესაძლებლობა მზარდი მომხმარებლების მოსაწყობად ” და სხვ.

დავუშვათ $W=\{w_1, w_2,..., w_n\}$ არის ატრიბუტთა წონები. მოწვეული ექსპერტთა ჯგუფიდან $E=\{e_1, e_2,..., e_t\}$ (სერვისის მეთვალყურეები, დისპეჩერები და ა.შ.), α_{ij}^k -ით ავღნიშნოთ e_k ექსპერტის ფაზი შეფასება PFN-ებში თითოეული კანდიდატი წერტილისათვის cs_i, $(i=1,...,m)$ თითოეულ s_j, $(j=1,..n)$ ატრიბუტთან მიმართებაში. e_k ექსპერტისთვის ჩვენ ვქმნით ბინარულ ფაზი მიმართების $\mathrm{A}_k=\{\alpha_{ij}^k,\ i=1,...,m;\ j=1,...,n\}$ გადაწყვეტილების მიღების მატრიცას, რომლის თითოეული ელემენტები წარმოდგენილია PFN–ში. თუ ზოგიერთი ატრიბუტი s_j ღირებულების ტიპისაა, ჩვენ ტრანსფორმაციას ვუკეთებთ ექსპერტთა შეფასებებს და α_{ij}^k იცვლება $(\alpha_{ij}^k)^c$ -ით. ექსპერტთა მონაცემები უნდა იყოს აგრეგირებული გადაწყვეტილების მიღების მატრიცის ეტალონში - $\mathrm{A}=\{\alpha_{ij},\ i=1,...,m;\ j=1,...,n\}$. უნდა აიგოს *ფაზი TOPSIS მიდგომა, რომელიც თითოეული კანდიდატის წერტილისათვის* cs_i, $(i=1,...,m)$ *აგრეგირებას უკეთებს წარმოდგენილ ობიექტურ და სუბიექტურ მონაცემებს სკალარულ მნიშვნელობებში - მომსახურეობის ცენტრების შერჩევის ინდექსი.* ეს აგრეგირებები შეიძლება ოფიციალურად იყოს წარმოდგენილი, როგორც TOPSIS–ის ფარდობითი სიახლოვე, რომელიც განსაზღვრულია α_{ij}, $j=1,...,n$ - პითაგორულ რიცხვებზე. ფორმალურად ეს ასე შეიძლება ჩავწეროთ (Tsulaia, 2020):

$$\begin{aligned}\beta_i &= \text{relative closeness of the alternative}(\mathrm{cs_i}) \\ &\equiv \text{TOPSIS aggregation}\,(\alpha_{i1},...,\alpha_{in}),\ i=1,...,m\end{aligned}. \qquad (3.1.1)$$

კანდიდატი წერტილების (მომსახურეობის ცენტრების) განთავსება/შერჩევის დაგეგმვის შემოთავაზებული პლატფორმა მოიცავს შემდეგ ნაბიჯებს (Tsulaia, 2020):

ბიჯი 1: განთავსების განმსაზღვრელი ატრიბუტების შერჩევა. მოიცავს განტავსების განმსაზღვრელი ატრიბუტების შერჩევას კანდიდატ წერტილებზე პოტენციური მდებარეობების შესაფასებლად. ეს ატრიბუტები მიიღება ექსპერტებთან და საქალაქო სატრანსპორტო ჯგუფის წევრებთან დისკუსიების შედეგად. ილუსტრირების მიზნით, გამოთვლებში ჩვენ ვიყენებთ ზემოთ ჩამოთვლილ მხოლოდ ხუთ ძირითად ატრიბუტს $(n=5)$: $s_1=$ ”ხელმისაწვდომობა”, $s_2=$

”უსაფრთხოება”, $s_3 =$”დაკავშირება მულტიმოდალურ ტრანსპორტთან”, $s_4 =$ ”ხარჯები”, $s_5 =$”მომხმარებელთა სიახლოვე”. მეოთხე ატრიბუტი არის ღირებულების ტიპი, დანარჩენები კი სარგებლიანობის ტიპის. როგორც ზემოთ აღინიშნა, ღირებულების ტიპის შეფასების მონაცემები უნდა გარდაიქმნას სარგებლიანობის ფორმებში.

ბიჯი 2: კანდიდატი მომსახურების ცენტრების განთავსების ადგილის შერჩევა. მოიცავს მომსახურების ცენტრების გახნის განხორციელებისთვის პოტენციური მდებარეობების შერჩევას. გადაწყვეტილების მიმღები პირები იყენებენ თავიანთ ცოდნას, გამოცდილებას ტრანსპორტირების ან ექსტრემალური მოვლენების გეოგრაფიული არეალის სხვა ასპექტებთან და მდგრადი სატვირთო რეგულაციების არსებობისთვის, სერვის-ცენტრების განსახორციელებლად კანდიდატი წერტილების ადგილმდებარეობის დასადგენად. მაგალითად, თუ გარკვეული ტერიტორიები შეზღუდულია მუნიციპალური ადმინისტრაციის მიერ მიწოდებისთვის, მაშინ ამ ტერიტორიებს ეკრძალებათ განხილულ იქნან როგორც პოტენციური ადგილები სერვის-ცენტრების განთავსებისათვის. იდეალურ შემთხვევაში, პოტენციური ადგილები არის ის, რაც ყველა ქალაქის დაინტერესებული მხარის ინტერესს წარმოადგენს, ესენი არიან ქალაქის მაცხოვრებლები, ლოჯისტიკური ოპერატორები, მუნიციპალური ადმინისტრაციები და ა.შ.

ბიჯი 3: ატრიბუტებთან მიმართებაში კანდიდატი მომსახურეობის ცენტრებისთვის რეიტინგების მინიჭება. დავუშვათ $\mathrm{A}_k = \{\alpha_{ij}^k \in q-ROFNs,\ i=1,...,m;\ j=1,...,n\}$ წარმოადგენს თითოუელი $e_k\left(k=1,2,..,t\right)$ ექსპერტის რეიტინგებს, წარმოდგენილს პითაგორულ რიცხვებში, თითოეული $cs_i\left(i=1,2,..,m\right)$ კანდიდატი წერტილისთვის $s_j\left(j=1,2,..,n\right)$ ატრიბუტთან მიმართებაში.

ბიჯი 4: პითაგორული ფაზი გადაწყვეტილების მიღების მატრიცის გამოთვლა ატრიბუტებზე და კანდიდატ წერტილებზე. დავუშვათ ყველა ექსპერტის რეიტინგები, როგორც წონები მოცემულია დადებითი რიცხვების სახით $\omega_k, \omega_k > 0, k=1,...,t$. თუ k-ური ექსპერტის მიერ გაკეთებული რეიტინგი ატრიბუტზე არის α_{ij}^k, მაშინ კანდიდატი წერტილების აგრეგირებული ფაზი რეიტინგები $\left(\alpha_{ij}\right)$

თითოეულ ატრიბუტთან მიმართებაში მოცემულია PFN-ების წონითი ჯამით გამოითვლება როგორც შეჯწონილი ჯამი:

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \alpha_{ij}^{k} \left(\omega_k / \sum_{l=1}^{t} \omega_l \right). \tag{3.1.2}$$

ფაზი გადაწყვეტილების მიღების მატრიცა $\{\alpha_{ij}\}$ CS კანდიდატი წერტილისათვის და S ატრიბუტისათვის აიგება შემდეგნაირად:

$$\begin{array}{c} \\ cs_1 \\ cs_2 \\ \\ cs_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & & s_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.1.3}$$

აიგება პითაგორული ფაზი გადაწყვეტილების მიღების მატრიცა $\{\alpha_{ij}\}$ და გამოითვლება α_{ij} ელემენტის Sc და Ac ფუნქციების მნიშვნელობები (განსაზღვრება 4.2).

ბიჯი 5: პითაგორული ფაზი PIS და NIS–ის იდენტიფიკაცია. TOPSIS მიდგომა იწყება პითაგორული ფაზი PIS და პითაგორული ფაზი NIS-ის განმარტებით. განსაზღვრება 4.4-ის მე-6 ფორმულის გამოყენებით PIS განისაზღვრება როგორც პითაგორული ფაზი სიმრავლე ატრიბუტებზე $S: cs^{+} = \{s_j, \alpha_j^{+} \equiv \underset{i}{Max}[(\alpha_{ij})] \mid j = 1,2,\dots,n\}$

, ხოლო NIS განისაზღვრება როგორც პითაგორული ფაზი სიმრავლე ატრიბუტებზე $S: cs^{-} = \{s_j, \alpha_j^{-} \equiv \underset{i}{Mix}[(\alpha_{ij})] \mid j = 1,2,\dots,n\}$.

რეალურ MCDM მოდელებში PIS და NIS ჩვეულებრივ არ არიან განხორციელებადი ალტერნატივები. ისინი ექსტრემალური და ჰიპოთეტური ალტერნატივები არიან.

ბიჯი 6. ალტერნატიული კანდიდატი წერტილების განთავსებების შეფასებებსა და პითაგორული ფაზი PIS-ისა და NIS-ს შორის მანძილების გამოთვლა. ჩვენ ვაგრძელებთ მანძილების გამოთვლას თითოეულ ალტერნატივასა და პითაგორულ ფაზი PIS- სა და NIS- ს შორის. (4.7) ფორმულის გამოყენებით, ჩვენ განვსაზღვრავთ დაშორებებს cs_i-ს ალტერნატივასა და პითაგორულ ფაზი PIS-სა და NIS- ს შორის, როგორც მანძილების შეწონილი ჯამები ექსტრემალურ და შეფასებულ PFN–ს შორის (Tsulaia, 2020):

$$D(cs_i, sc^+) = \sum_{j=1}^{n} w_j d_q(\alpha_{ij}, \alpha_j^+) = 1/2 \cdot$$
$$\sum_{j=1}^{n} w_j (|(\mu_{\alpha_{ij}})^2 - (\mu_{\alpha_j^+})^2| + |(\nu_{\alpha_{ij}})^2 - (\nu_{\alpha_j^+})^2|)$$
$$D(cs_i, sc^-) = \sum_{j=1}^{n} w_j d_q(\alpha_{ij}, \alpha_j^-) = 1/2 \cdot$$
$$\sum_{j=1}^{n} w_j (|(\mu_{\alpha_{ij}})^2 - (\mu_{\alpha_j^-})^2| + |(\nu_{\alpha_{ij}})^2 - (\nu_{\alpha_j^-})^2|) \tag{3.1.4}$$

ბიჯი 7. TOPSIS აგრეგირებების, როგორც მომსახურეობის წერტილის შერჩევის ინდექსის გამოთვლა ყველა ალტერნატივისთვის.

ზოგადად, რაც უფრო დიდი $D(cs_i, sc^-)$ და რაც უფრო პატარა $D(cs_i, sc^+)$ უკეთესია ალტერნატივა cs_i -ის არჩევითობისთვის, ან მის ადრეულ რანჟირებისთვის. ეს განმარტება ასახულია სკალარულ სიდიდეში, რომელსაც კლასიკური TOPSIS მეთოდში, ავტორები ჩვეულებრივ ითვლიან როგორც cs_i ალტერნატივის სიახლოვის კოეფიციენტს (RC). იგი წარმოადგენს TOPSIS -ის აგრეგირების შედეგს, რომელსაც ჩვენს ამოცანაში ასევე ალტერნატივის, როგორც *კანდიდატი სერვის ცენტრის შერჩევის ინდექსს* ვუწოდებთ პითაგორულ PIS sc^- – სთან მიმართებაში (Tsulaia, 2020):

$$\beta_i \equiv RC(cs_i) = \frac{D(cs_i, cs^-)}{D(cs_i, cs^+) + D(cs_i, cs^-)}, \quad i = 1,...,m. \tag{3.1.5}$$

3.2. ობიექტების განთავსება/შერჩევის სიმრავლური დაფარვის ამოცანის მრავალკრიტერიუმიანი დისკრეტული ოპტიმიზაციის მოდელი

ობიექტების განთავსება/შერჩევის სიმრავლური დაფარვის ამოცანა (LSCP– Location Set Covering Problem) შემოთავაზებული იქნა თორეგასა და რეველის მიერ 1972 წელს, რომელიც ითვალისწინებს სერვის მომსახურეობაზე ყველაზე ნაკლები რაოდენობის ობიექტების, სერვისცენტრების განთავსებას, საჭიროების მოთხოვნილების მანძილზე ყველა მოთხოვნის წერტილის დასაფარად. ჩვენი ყურადღების ცენტრშია მრავალკრიტერიუმიანი ფაზი სიმრავლეების დაფარვის ამოცანები (Sirbiladze, Sikharulidze, Ghvaberidze, Matsaberidze, 2011; Sirbiladze, Ghvaberidze, Matsaberidze, 2014) ექსტრემალური პირობებისთვის. ამ თავში

წარმოდგენილ კვლევაში აგებულია ახალი ფაზი LSCP მოდელი გადაუდებელი დახმარების ცენტრების განთავსება/შერჩევის დაგეგმვისთვის.

როგორც წინა პარაგრაფში ვისაუბრეთ, აგებული ფაზი TOPSIS-ის ტექნოლოგია გამოთვლების შედეგად წარმოადგენს კანდიდატი სერვის ცენტრის შერჩევის ინდექსს. სერვის ცენტრის ინდექსი ასახავს ექსპერტულ შეფასებებს ცენტრის მიმართ, ყველა ფაქტობრივი მახასიათებლის, ფაქტორების გათვალისწინებით. თუ $x = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ არის ბულის ტიპის გადაწყვეტილების ვექტორი, რომელიც განსაზღვრავს გარკვეულ არჩევანს კანდიდატი სერვის ცენტრებისგან $CS = \{cs_1, cs_2, ..., cs_m\}$ ობიექტების განთავსება/შერჩევისთვის, ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ყველა კანდიდატი *ცენტრების ერთობლივი შერჩევის ინდექსი,* როგორც $\beta_j x_j$ სიდიდეების წრფივი ჯამი: შედეგად, აიგება ახალი მიზნობრივი ფუნქცია - *ცენტრების ჯამური შერჩევის ინდექსი* - $\sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j$.

ამ სიდიდის მაქსიმიზაციის დროს ვირჩევთ ცენტრების ჯგუფს საუკეთესო ჯამური შერჩევის ინდექსით დასაშვები დაფარვის შერჩევებიდან. კლასიკური ტიპის განთავსების ამოცანებში ტრადიციულად ცდილობენ მინიმუმამდე დაიყვანოს იმ ცენტრების რაოდენობა, სადაც შესაძლებელია განთავსდეს მომსახურების ცენტრები - $\sum_{j=1}^{m} x_j$. ჩვენი ამოცანა კი მიზნად ისახავს მომსახურების სერვის ცენტრების ისეთ განთავსებას, როდესაც კანდიდატი ცენტრებიდან დაზიანებულ პუნქტებამდე, ანუ მოთხოვნის წერტილებამდე სატრანსპორტო საშუალებები ნებადართულ დისტრიბუციულ ქსელეში, ექსტრემალურ სიტუაციაში მინიმალურ, წინასწარ განსაზღვრულ დროში გადაადგილდებიან. მოთხოვნის წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც მომსახურების სერვის ცენტრებიდან უნდა დაიფაროს დისტრიბუციული ქსელით, აღვნიშნოთ $A = \{a_1, \ldots a_k\}$ -ით. ამოცანა მიზნად ისახავს მომსახურების სერვის ცენტრების $CS = \{cs_1, cs_2, ..., cs_m\}$ ისეთ განთავსება/შერჩევას, საიდანაც მოთხოვნის წერტილები $A = \{a_1, ..., a_k\}$ სადისტრიბუციო ქსელით წინასწარ განსაზღვრულ მინიმალურ დროში უნდა დაიფაროს მომსახურეობისთვის. ეს განპირობებულია დაზიანების ზონაში დარჩენილი მოსახლეობის პირველადი

პირადი მოხმარების საშუალებების სწრაფი მომარაგების მიზნით. დავუშვათ ექსპერტებმა შეაფასეს მოძრაობის ფაზი დროები (სამკუთხა ფაზი რიცხვებში (TFNs) (Dubois D., Prade H., 1988) მომხმარებელსა და კანდიდატ წერტილებს შორის - $\tilde{t}_{ij},\, a_i \in A;\; cs_j \in CS$. გადაუდებელი დაგეგმვისთვის ექსტრემალურ გარემოში მომსახურების ცენტრის რადიუსი განისაზღვრება არა მანძილით, არამედ გადაადგილების მაქსიმალურ T დროზე დაყრდნობით, რადგან ექსტრემალურ სიტუაციების დროს მომხმარებლებისთვის სწრაფი დახმარება და მომსახურებაა საჭირო. შესაბამისად, ყოველი $a_i \in A$ მომხმარებლისთვის განისაზღვრება ისეთი კანდიდატი წერტილების ქვესიმრავლე, რომლებიდანაც ამ მოთხოვნის წერტილის მომსახურეობისთვის (ტრანსპორტით მომსახურეობის ქსელით საჭირო ნივთების მიტანა) საჭირო მოსალოდნელი დრო $E(\tilde{t}_{ij})$ არ აღემატება წინასწარ განსაზრვრულ რაიმე T დროს. აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე N_i-თი, მაშინ $N_i = \{cs_j,\, cs_j \in CS / E(\tilde{t}_{ij}) \le T\},\, i = 1,\dots,m$, სადაც

$$E(\tilde{t}_{ij}) = \tilde{t}_{ij}^{2} + (\tilde{t}_{ij}^{3} - 2\tilde{t}_{ij}^{2} + \tilde{t}_{ij}^{1})/4, \qquad (3.2.1)$$

$\tilde{t}_{ij} \equiv (\tilde{t}_{ij}^{1}, \tilde{t}_{ij}^{2}, \tilde{t}_{ij}^{3})$ TFN სიდიდის (Dubois & Prade, 1988) მოსალოდნელი მნიშვნელობაა.

შედეგად ჩვენ განვიხილავთ ბი-კრიტერიუმიან განთავსება/შერჩევის სიმრავლური დაფარვის ამოცანა (Tsulaia, 2020):

$$\min\ z_1 = \sum_{j=1}^{m} x_j\ ; \qquad (3.2.2)$$

$$\max\ z_2 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j\ ; \qquad (3.2.3)$$

$$\sum_{s_j \in N_i} x_j \ge 1\ (i = 1,2,\dots,k)\ ;\ x_j \in \{0,1\} \quad j = 1,2,\dots,m\,. \qquad (3.2.4)$$

შენიშვნა: ამ თავში ჩვენ გვინდოდა გვეჩვენებინა, თუ როგორ შეიძლება გამოყენებული იქნას ექსპერტული შეფასებები ფაზი-TOPSIS მეთოდით ისეთ მნიშვნელოვან ამოცანაში, როგორიცაა ობიექტების განთავსების დაფარვა/დაყოფის კლასიკური ბულის დაპროგრამების ამოცანა. კლასიკური მოდელი გადაიქცა ბი-კრიტერიუმიან ამოცანად, სადაც ახალი მიზნობრივი ფუნქციის ფოორმირებაში სწორედ რომ ექსპერტული მონაცემების ფაზი-TOPSIS მეთოდით აგრეგირებული

მნიშვნელობები იქნა გამოყენებული. პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით აქ აგებული (3.2.2)-(3.2.4) ბიკრიტერიუმიანი დაფარვის ამოცანა არ წარმოადგენს დამაკმაყოფილებელ მოდელს რეალური განზომილებების შემთხვევაში. ცხადია რომ, საჭიროა მისი დაყოფის ამოცანად გადაქცევა ახალი შეზღუდვებისა და მოთხოვნების გათვალსიწინებით. მაგრამ ეს მიმართულება დისერტაციის თემას სცილდება და აქ არ განვიხილავთ.

3.3. გადაუდებელი დახმარების მომსახურეობის ცენტრების განთავსება/შერჩევის მოდელის რიცხვითი სიმულაცია

აგებული ოპტიმიზაციის მოდელის ეფექტურობის ილუსტრაციის მიზნით განვიხილოთ რიცხვითი მაგალითი (Tsulaia, 2020). ჰიპოთეტურად განვიხილოთ საქართველოს რომელიმე ცენტრალური ქალაქის საგანგებო სიტუაციების მართვის ადმინისტრირების ის ნაწილი, რომელიც ითვალისწინებს ხანძარსაწინააღმდეგო სადგურების განთავსება/შერჩევის ამოცანას ქალაქის გარემოში არსებული კრიტიკული ინფრასტრუქტურის ობიექტების დროული მომსახურებისთვის ექსტრემალური სიტუაციების ჩამოყალიბების შემთხვევაში. დავუშვათ, რომ ქალაქს გააჩნია ექვსი მოთხოვნის ასეთი პუნქტი, როგორც მომხმარებელი (კრიტიკული ინფრასტრუქტურული ობიექტები) და ხუთი კანდიდატი ცენტრი (სახანძრო სადგურები). დავუშვათ გვყავს საქართველოს საგანგებო სიტუაციების მართვის სააგენტოს (EMA- Emergency Management Agency) სამი ექსპერტი, ექსტრემალურ სიტუაციასი სს-ით გადაადგილებებისთვის საჭირო დროისა და კანდიდატი ცენტრების (სახანძროების) მომსახურეობაზე შერჩევის რანჟირების შესაფასებლად. მოთხოვნის პუნქტებსა და კანდიდატ ცენტრებს შორის მოგზაურობის დრო ფასდება სამკუთხა ფაზი რიცხვებით (იხ. ცხრილი 3.3.1). დავუშვათ რომ, საქართველოს EMA–ს სტანდარტის შესაბამისად, სახანძრო სადგურების ადგილმდებარეობის პრინციპია ის, რომ სახანძრო სადგურს შეუძლია გაგზავნოს მაშველი სატრანსპორტო სახანძრო საშუალება მხოლოდ იმ მოთხოვნის წერტილში, რომელიც ამ სერვის ცენტრიდან დაშორებულია არა უმეტეს სავალი T=5 წუთისა ინსტრუქციის მიღებიდან. აქედან გამომდინარე, ჩვენ გვაქვს რადიუსის წუთების დაფარვა $T=5$.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
cs_1	(3,5,7)	(2,4,6)	(4,6,7)	(4,7,9)	(1,3,5)	(1,3,4)
cs_2	(6,10,14)	(4,9,14)	(2,4,6)	(5,7,10)	(1,4,8)	(1,4,5)
cs_3	(4,8,12)	(4,7,11)	(4,6,9)	(2,4,7)	(4,7,10)	(4,6,8)
cs_4	(4,7,10)	(7,11,15)	(6,9,13)	(4,6,8)	(2,4,6)	(1,3,5)
cs_5	(1,3,5)	(2,4,6)	(1,3,6)	(2,4,7)	(4,6,8)	(5,9,12)

ცხრილი 3.3.1. ფაზი მოგზაურობის დროები $\tilde{t}_{ij}$ სახანძრო სადგურებიდან კრიტიკული დანიშნულების ობიექტამდე (წუთებში).

N_i კანდიდატი წერტილების დაფარვის სიმრავლე წარმოდგენილი არაა (გამოტოვებულია მისი დიდი მოცულობის გამო). დავუშვათ ექსპერტებმა დააგენერირეს ატრიბუტების წონები, როგორც სიდიდეები საერთო დანიშნულების საფუძველზე კონსესუსის მიღწევის შედეგად შემდეგნაირად: $w_1 = 0.25$; $w_2 = 0.15$; $w_3 = 0.25$; $w_4 = 0.20$; $w_5 = 0.15$.

თითოეული $e_k \left(k = 1,2,3\right)$ ექსპერტი წარმოადგენს r_{ij}^k რეიტინგს თითოეული s_i , $(i = 1,\ldots,5)$ კანდიდატი ცენტრისთვის თითოეული s_j , $(j = 1,\ldots,5)$ ატრიბუტთან მიმართებაში პითაგორულ სიდიდეებში.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
cs_1	(0.7, 0.4)	(0.7, 0.3)	(0.7, 0.4)	(0.7, 0.4)	(0.8, 0.3)
cs_2	(0.6, 0.5)	(0.7, 0.4)	(0.4, 0.6)	(0.8, 0.3)	(0.7, 0.4)
cs_3	(0.7, 0.4)	(0.9, 0.3)	(0.6, 0.5)	(0.7, 0.4)	(0.8, 0.3)
cs_4	(0.6, 0.5)	(0.8, 0.3)	(0.8, 0.3)	(0.9, 0.3)	(0.8, 0.4)
cs_5	(0.8, 0.3)	(0.6, 0.4)	(0.9, 0.3)	(0.7, 0.4)	(0.8, 0.3)

ცხრილი 3.3.2. A_1 შეფასების მატრიცა ექსპერტი-1-ის მიერ.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
cs_1	(0.7, 0.3)	(0.8, 0.3)	(0.6, 0.3)	(0.6, 0.3)	(0.7, 0.4)
cs_2	(0.6, 0.5)	(0.7, 0.3)	(0.7, 0.4)	(0.9, 0.3)	(0.8, 0.3)
cs_3	(0.8, 0.4)	(0.9, 0.3)	(0.6, 0.4)	(0.8, 0.1)	(0.6, 0.2)
cs_4	(0.6, 0.4)	(0.8, 0.3)	(0.9, 0.3)	(0.7, 0.3)	(0.6, 0.2)
cs_5	(0.8, 0.5)	(0.7, 0.4)	(0.8, 0.4)	(0.7, 0.2)	(0.9, 0.2)

ცხრილი 3.3.3. A_2 შეფასების მატრიცა ექსპერტი-2-ის მიერ.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
cs_1	(0.7, 0.4)	(0.8, 0.3)	(0.7, 0.5)	(0.7, 0.4)	(0.9, 0.4)
cs_2	(0.6, 0.5)	(0.7, 0.4)	(0.5, 0.3)	(0.7, 0.2)	(0.6, 0.3)
cs_3	(0.6, 0.2)	(0.9, 0.4)	(0.7, 0.5)	(0.7, 0.3)	(0.6, 0.3)
cs_4	(0.8, 0.4)	(0.9, 0.4)	(0.8, 0.5)	(0.8, 0.5)	(0.8, 0.3)
cs_5	(0.9, 0.2)	(0.6, 0.3)	(0.8, 0.5)	(0.9, 0.4)	(0.7, 0.4)

ცხრილი 3.3.4. A_3 შეფასების მატრიცა ექსპერტი-3-ის მიერ.

დავუშვათ ექსპერტებს თანაბარი რეიტინგი აქვთ $\{\omega_j = 1/3\}$. ფორმულა 3.1.2-ის გამოყენებით ექსპერტების შეფასებები აგრეგირებულია პითაგორულ ფაზი გადაწყვეტილების მიღების მატრიცაში $\{\alpha_{ij}\}$ (ცხრილი 3.3.5).

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
cs_1	(0.7,0.36)	(0.77,0.3)	(0.67,0.39)	(0.67,0.36)	(0.82,0.36)
cs_2	(0.6,0.5)	(0.7,0.36)	(0.56,0.42)	(0.82,0.26)	(0.71,0.33)
cs_3	(0.71,0.32)	(0.9,0.33)	(0.64,0.46)	(0.74,0.23)	(0.69,0.26)
cs_4	(0.69,0.43)	(0.84,0.33)	(0.84,0.36)	(0.82,0.36)	(0.75,0.29)
cs_5	(0.84,0.31)	(0.64,0.36)	(0.84,0.39)	(0.8,0.32)	(0.82,0.29)

ცხრილი 3.3.5. დაგროვილი პითაგორული ფაზი გადაწყვეტილების მატრიცა $\{\alpha_{ij}\}$

სექცია 3.1.-ში წარმოდგენილი ახალი ფაზი TOPSIS მეთოდის ალგორითმის გამოყენებით ჩვენ გამოვითვალეთ კანდიდარი ცენტრების შერჩევის ინდექსები:

$\beta_1 = 0.428,\ \beta_2 = 0.914,\ \beta_3 = 0.524,\ \beta_4 = 0.397,\ \ \beta_5 = 0.287.$

ამ გამოთვლების შემდეგ აიგო ბიკრიტერიუმიანი ბულის დაპროგრამების ამოცანა (3.2.2, 3.2.3, 3.2.4):

$$\begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \Rightarrow \min, \\ f_2 = 0.428\,x_1 + 0.914\,x_2 + 0.524\,x_3 \\ \qquad + 0.397\,x_4 + 0.287\,x_5 \Rightarrow \max \\ x_1 + x_5 \geq 1, \\ x_2 + x_5 \geq 1, \\ x_3 + x_5 \geq 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 \geq 1, \\ x_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,3,4,5. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

შემუშავებული პროგრამული კოდის საფუძველზე (3.3.1)-ამოცანისთვის ნაპოვნია პარეტო ამონახსნები (Ehrgott, 2005), როგორც განთავსება/შერჩევის სარეკომენდაციო გადაწყვეტილებები. ესენია:

$a)\ \{cs_1, cs_5\},\ f_1 = 2;\ \ f_2 = 1.201,$

$b)\ \{cs_1, cs_2, cs_3\},\ f_1 = 3;\ f_2 = 1.866,$

$c)\ \{cs_1, cs_2, cs_3, cs_4\},\ \ f_1 = 4;\ f_2 = 2.263,$

$d)\ \{cs_1, cs_2, cs_3, cs_4, cs_5\},\ \ f_1 = 5;\ f_2 = 2.55.$

ნათელია, რომ პარეტოს ამონახსნებში სახანძრო სადგურების რაოდენობის გაზრდა გვაძლევს მეორე ობიექტური ფუნქციის უკეთეს დონეს - სახანძრო სადგურების შერჩევის ინდექსს, მაგრამ გადაწყვეტილება სახანძრო სადგურების, როგორც სერვის-ცენტრების არჩევის შესახებ დამოკიდებულია გადაწყვეტილების მიმღები პირის უპირატესობებზე ადმინისტრაციული მოქმედებების რისკებთან დაკავშირებით.

ამრიგად, სადისერტაციო ნაშრომის მესამე თავში წარმოდგენილია სერვის ცენტრების განთავსება/შერჩევის პრობლემის ახალი მიდგომა ექსტრემალური და განუზღვრელი გარემოსთვის. მიდგომა იყენებს პითაგორულ ფაზი რიცხვებში წარმოდგენილ ექსპერტულ ცოდნას და ითვალისწინებს განთავსების შერჩევის ხარისხის შეფასებას (ხელმისაწვდომობა, უსაფრთხოება და ა.შ.) აგებული ახალი ფაზი TOPSIS მიდგომის გამოყენებით. მეორეს მხრივ, მოდელი ასევე განიხილავს ყველა მნიშვნელოვან ინფრასტრუქტურულ პუნქტამდე დროულად მისვლის შესაძლებლობებს, რომელიც წარმოდგენილია სამკუთხა ფაზი რიცხვებით. შედეგად

მიღებულია ბი-კრიტერიუმიანი სიმრავლის დაფარვის ამოცანა. აგებული მიდგომა ილუსტრირებულია რიცხვითი მაგალითით და განსაზღვრავს თუ რომელი ტიპის სახანძრო სადგურების შერჩევა მოხდება მომსახურეობის განთავსებისთვის ყველა შესაძლო სადგურებიდან პირობითად ჰიპოთეტური ქალაქის მაგალითზე. საოპტიმიზაციო ამოცანის გადაწყვეტიდან გამომდინარე მართვის სისტემის დისპეჩერების მიერ უპირატესი პარეტო ამონახსენის მიხედვით შერჩეული სადგურებიდან მოხდება კრიტიკული ინფრასტრუქტურის პუნქტების მომსახურეობა კატასტროფის შემთხვევაში. ამოცანის დიდი განზომილების შემთხვევაში მომავალში აიგება ეფსილონ-შეზღუდვის მიდგომა პარეტო ფრონტის მისაღებად.

დანართი A

ურთიერთმოქმედი ატრიბუტების მქონე მრავალ ატრიბუტული გადაწყვეტილების მიღების მხარდამჭერი პროგრამული კოდი აგრეგირების $As-F_M$ ოპერატორების ბაზაზე

ტექნოლოგიური განმარტება

პროგრამული კოდი შესრულებულია python დაპროგრამების ენაზე (ვერსია 3.8) და შედგება შემდეგი სამი ძირითადი ფაილისგან: main.py, CollectInitialDatas.py და BuildAggregations.py.

CollectInitialDatas.py პასუხისმგებელია შემავალი პარამეტრების ფორმირებაზე, რაც გულისხმობს საწყისი ინფორმაციის შეგროვებას (ექსპერტული შეფასებები, წონითი ვექტორი, ინდექსების მატრიცა) და შენახვას InputFiles სახელწოდების მქონე საქაღალდეში. შეგროვებული მონაცემების საფუძველზე გენერირდება .txt გაფართოების მქონე შემდეგი ფაილები: DMP1.txt (ინფორმაცია შეფასების მატრიცის შესახებ გადაწყვეტილების მიმღები პირი 1–ის მიხედვით), DMP2.txt (ინფორმაცია შეფასების მატრიცის შესახებ გადაწყვეტილების მიმღები პირი 2–ის მიხედვით), DMP3.txt (ინფორმაცია შეფასების მატრიცის შესახებ გადაწყვეტილების მიმღები პირი 3–ის მიხედვით), DMP4.txt (ინფორმაცია შეფასების მატრიცის შესახებ გადაწყვეტილების მიმღები პირი 4–ის მიხედვით), weights.txt (ინფორმაცია წონების ვექტორზე), IndexMatrix.txt (ინფორმაცია კრიტერიუმის ურთიერთქმედების ინდექსების მატრიცის შესახებ).

BuildAggregations.py პასუხისმგებელია აგრეგირების მთლიანი ბიზნეს–პროცესის იმპლემენტაციაზე. გამოთვლების შედეგების შენახვა ხდება OutputFiles სახელწოდების მქონე საქაღალდეში შემდეგი ორი ძირითადი ტექსტური ფაილის სახით. ესენია: As_P_IFW.txt (აგრეგირებული საერთო შეფასებები აგრეგირების ოპერატორების მიხედვით) და rank.txt (აგრეგირების ოპერატორების მიერ განსაზღვრული რანჟირებული დალაგების შედეგები).

main.py წარმოადგენს მთავარ პროგრამას, შესაბამისად, ასრულებს II თავში განხილული პრაქტიკული ამოცანის ალგორითმის რეალიზაციას სხვადასხვა ფუნქციების ორგანიზებულად მიმართვის გზით.

main.py ფაილში წარმოდგენილი პროგრამული კოდი

```
import CollectInitialDatas as c
import BuildAggregations as agg

def main(quantity_of_experts=4,quantity_of_alternatives=5,quantity_of_factors=5):
    try:

        #საწყისი ინფორმაციის ფორმირება
        c.Get_appraisal_matrix_by_DMPs(quantity_of_experts,quantity_of_alternatives,
quantity_of_factors)
        c.Get_weighted_vector_by_DMPs(quantity_of_alternatives)
        c.Get_matrix_of_indexes_by_DMPs(quantity_of_factors)

        #ექპერტული შეფასებების ფორმირება
        expert_evaluations = dict.fromkeys([f'e{e+1}' for e in range(quantity_of_experts)], None)
        for e in range(quantity_of_experts):
            expert_evaluations[f'e{e+1}']=c.Import_alternatives_by_factors(f'InputFiles\DMP{e+1}.txt')
        print(expert_evaluations)

        #აგრეგირებები
        overall_evaluations = agg.BuildAggregations(expert_evaluations,
                                            c.Import_weighted_vector(),
                                            0.7,
                                            c.Import_matrix_of_indexes())
        print(overall_evaluations)

        #აგრეგირების შედეგების ექსპორტი
        agg.Export_Aggregation_Results(overall_evaluations)

        #რანჟირების შედეგების ექსპორტი
        agg.Export_Ranking_Results(quantity_of_factors)

    except Exception as e:
        print(e.args[0])


if __name__ == '__main__':
    main()
```

```
def Get_appraisal_matrix_by_DMPs(quantity_of_experts, quantity_of_alternatives, quantity_of_factors):
    for e in range(quantity_of_experts):
        print(f'Please enter evaluations in term of tuple of real numbers for expert {e+1}')
        f_out=open(f'InputFiles\DMP{e+1}.txt','w',encoding='utf-8')
        for d in range(quantity_of_alternatives):
            for s in range(quantity_of_factors):
                tuple=eval(input(f'd{d+1} on s{s+1}: '))
                f_out.write(f'{tuple} ')
            f_out.write('\n')
        f_out.close()

def Import_alternatives_by_factors(filename):
    evalutions={}
    f_in=open(filename,"r",encoding="utf-8")
    for index,row in enumerate(f_in.readlines()):
        evalutions[f'd{index+1}']=[eval(column.strip("\n")) for column in row.split(" ")]
    f_in.close()
    return evalutions

def Get_weighted_vector_by_DMPs(quantity_of_alternatives):
    f_out=open(f'InputFiles\weights.txt','w',encoding='utf-8')
    for d in range(quantity_of_alternatives):
        weight=input(f'please enter weight on d{d+1}: ')
        f_out.write(f'{weight} ')
    f_out.close()

def Import_weighted_vector():
    f_in=open("InputFiles\weights.txt","r", encoding="utf-8")
    weights=[float(w) for w in f_in.read().strip(" ").split(" ") if w!='\n']
    f_in.close()
    return weights

def Get_matrix_of_indexes_by_DMPs(quanntity_of_factors):
    f_out=open(f'InputFiles\IndexMatrix.txt','w',encoding='utf-8')
    for i in range(quanntity_of_factors):
        for j in range(quanntity_of_factors):
            if (i==j):
                f_out.write(f'0.00 ')
            else:
                v=input(f'please enter values of s{i+1} on s{j+1}: ')
                f_out.write(f'{v} ')
        f_out.write('\n')
    f_out.close()

def Import_matrix_of_indexes():
    s=[]
    f_in=open("InputFiles\IndexMatrix.txt","r", encoding="utf-8")
    for line in f_in.readlines():
        s.append([float(i) for i in line.split(" ") if i !='\n'])
    f_in.close()
    return s
```

BuildAggregations.py *ფაილში წარმოდგენილი პროგრამული კოდი*

```
import math
import itertools

def Build_resulting_decision_matrix(expert_evaluations):
    quantity_of_experts = len(expert_evaluations)
    matrix={'miu':[], 'niu':[]}
    for alternative in expert_evaluations['e1'].keys():
        miu_row=[]
        niu_row=[]
        for factor in range(len(expert_evaluations['e1']['d1'])):
            p=0.0
            lev=[]
            while(p<1.0001):
                l=sum([1 for evaluations in expert_evaluations.values() if
evaluations[alternative][factor][0]>=p])/quantity_of_experts
                r=sum([1 for evaluations in expert_evaluations.values() if
evaluations[alternative][factor][1]>=p])/quantity_of_experts
                lev.append(tuple([l,r]))
                p+= 0.1

            t=len(lev)
            miu_row.append(round(sum([lev[i][0] for i in range(t) if lev[i][0]>0.0])/t,2))
            niu_row.append(round(sum([lev[i][1] for i in range(t) if lev[i][1]>0.0])/t,2))
        matrix['miu'].append(miu_row)
        matrix['niu'].append(niu_row)
    return matrix

def BuildAggregations(expert_evaluations,weights, beta, indMatrix):
    try:
        dq= len(expert_evaluations['e1'])       #number of alternatives
        k = len(expert_evaluations['e1']['d1'])  #number of factors
        n = math.factorial(k)                    #number of permutations
        print(dq,k, n)
        w=weights
        print(f'weighted vector: {w}\n')
        s=indMatrix
        print("matrix of criteria interaction indexes:")
        for i in range(len(s)):
            for j in range(len(s)):
                print(f'{s[i][j]:.2f}', end=" ")
            print("\n")
        ind=[round(w[i] + sum([s[i][pi] for pi in range(i)])/2 - sum([s[i][pj] for pj in range(i+1, k)])/2,3)
         for i in range(k)]
        print(f'indexes: {ind}\n')
        P = [list(j) for j in list(itertools.permutations(ind))]
        print(f'Permutations:{P}\n')

        Px=[[round(beta * P[j][i] + (1 - beta) * w[i],4) for i in range(k)] for j in range(n)]
        print(f'Px:{Px}\n')

        matrix=Build_resulting_decision_matrix(expert_evaluations)
```

```
#print(matrix)
miu=matrix['miu']
#print("miu", miu)
niu=matrix['niu']
#print("niu", niu)

prmiu=[[1 for j in range(n)] for i in range(dq)]
prniu=[[1 for j in range(n)] for i in range(dq)]
prmiug=[[1 for j in range(n)] for i in range(dq)]
prniug=[[1 for j in range(n)] for i in range(dq)]
per=list(itertools.permutations(range(1,k+1)))
for i in range(dq):
    for j in range(n):
        for a in range(k):
            prmiu[i][j]*=round(pow(1-miu[i][per[j][a]-1],Px[j][a]),6)
            prniu[i][j]*=round(pow(niu[i][per[j][a]-1],Px[j][a]),6)
            prmiug[i][j]*=round(pow(miu[i][per[j][a] -1],Px[j][a]),6)
            prniug[i][j]*=round(pow(1- niu[i][per[j][a] -1],Px[j][a]),6)

namiu=[1.0 for i in range(dq)]
naniu=[1.0 for i in range(dq)]
namiug=[1.0 for i in range(dq)]
naniug=[1.0 for i in range(dq)]
for i in range(dq):
    for a in range(k):
        namiu[i]*= round(pow(1- miu[i][a],w[a]),6)
        naniu[i]*= round(pow(niu[i][a],w[a]),6)
        namiug[i]*= round(pow(miu[i][a],w[a]),6)
        naniug[i]*= round(pow(1- niu[i][a],w[a]),6)

submn=[[0.0,0] for j in range(dq)]
camiu=[1.0 for j in range(dq)]
caniu=[1.0 for j in range(dq)]
camiug=[1.0 for j in range(dq)]
caniug=[1.0 for j in range(dq)]
for j in range(dq):
    for i in range(k):
        submn[i][0] = miu[j][i] - niu[j][i]
        submn[i][1] = i
    submn=sorted(submn, key=lambda x: x[0], reverse=True)
    for i in range(k):
        index=submn[i][1]
        P[j][i] = ind[index]
        camiu[j]*= round(pow(1- miu[j][index],P[j][i]),6)
        caniu[j]*= round(pow(niu[j][index],P[j][i]),6)
        camiug[j]*= round(pow(miu[j][index],P[j][i]),6)
        caniug[j]*= round(pow(1- niu[j][index],P[j][i]),6)

overall_evaluations = {
            'IFWA':[(1-namiu[i],naniu[i]) for i in range(dq)],
            'IFWG':[(namiug[i],1-naniug[i]) for i in range(dq)],
            'IFCA':[(1-camiu[i],caniu[i]) for i in range(dq)],
            'IFCG':[(camiug[i], 1-caniug[i]) for i in range(dq)],
            'As_P_IFWA v':[(1-min(prmiu[i]),min(prniu[i])) for i in range(dq)],
```

```
                    'As_P_IFWA ^':[(1-max(prmiu[i]),max(prniu[i])) for i in range(dq)],
                    'As_P_IFWG v':[(max(prmiug[i]),1-max(prniug[i])) for i in range(dq)],
                    'As_P_IFWG ^':[(min(prmiug[i]),1-min(prniug[i])) for i in range(dq)]
                    }
        #print(overall_evaluations)
        return overall_evaluations

    except Exception as e:
        print(e.args[0])

def Export_Aggregation_Results(overall_evaluations):
    try:
        prn=open("OutputFiles\As_P_IFW.txt","w", encoding="utf-8")
        sub=open("OutputFiles\sub.txt","w", encoding="utf-8")
        prn.write("%16s%13s%13s%13s%13s%13s\n"%("Agg.   Operators".center(16,"   "),"d1".center(16,"
"),"d2".center(16," "),"d3".center(16," "),"d4".center(16," "),"d5".center(16," ")))
        for key, value in overall_evaluations.items():
            ks="%16s"%(key.center(16,' '))
            prn.write(ks)
            sub.write(ks)
            for v in value:
                prn.write(str("(%5.3f,%5.3f)"%(v[0],v[1])).center(16," "))
                sub.write("%5.3f "%(v[0]-v[1]))
            prn.write("\n")
            sub.write("\n")
        prn.close()
        sub.close()
    except Exception as e:
        print(e.args[0])

def Export_Ranking_Results(quantity_of_factors):
    try:
        k=quantity_of_factors
        sub=open("OutputFiles\sub.txt","r", encoding="utf-8")
        rw=open("OutputFiles\\rank.txt","w", encoding="utf-8")
        rw.write("%16s%16s\n"%("Agg. Operators".center(16," "),"Ranking order".center(16," ")))
        for line in sub.readlines():
            t=line[16:].strip("").split(" ")
            t.remove("\n")
            subdec=sorted([(value,   index)   for   index,value   in   enumerate(t)],   key=lambda   x:   x[0],
reverse=True)
            rw.write("%16s"%(line[:16]).center(16," "))
            for i in range(k):
                if(i==k-1):
                    rw.write("d%d"%(subdec[i][1]+1))
                else:
                    rw.write("d%d>"%(subdec[i][1]+1))
            rw.write("\n")
        sub.close()
        rw.close()
    except Exception as e:
        print(e.args[0])
```

დანართი B

გადაუდებელი დახმარების მომსახურეობის ცენტრების განთავსება/შერჩევის მოდელის რიცხვითი სიმულაციის პროგრამული კოდი დაფუძნებული პითაგორულ ფაზი რიცხვებში წარმოდგენილ ექსპერტულ ცოდნასა და აგრეგირების ახალ ფაზი TOPSIS მიდგომის ბაზაზე.

ტექნოლოგიური განმარტება

პროგრამული კოდი შესრულებულია python დაპროგრამების ენაზე (ვერსია 3.8) და შედგება შემდეგი სამი ძირითადი ფაილისგან: main.py, CollectInitialDatas.py და TOPSISAggregations.py.

CollectInitialDatas.py პასუხისმგებელია შემავალი პარამეტრების ფორმირებაზე, რაც გულისხმობს საწყისი ინფორმაციის შეგროვებას (ექსპერტული შეფასებები, წონითი ვექტორი, ფაზი მოგზაურობის დროები) და შენახვას InputFiles სახელწოდების მქონე საქაღალდეში. შეგროვებული მონაცემების საფუძველზე გენერირდება .txt გაფართოების მქონე შემდეგი ფაილები: expert1.txt (ინფორმაცია შეფასების მატრიცის შესახებ გადაწყვეტილების მიმღები პირი 1–ის მიხედვით), expert2.txt (ინფორმაცია შეფასების მატრიცის შესახებ გადაწყვეტილების მიმღები პირი 2–ის მიხედვით), expert3.txt (ინფორმაცია შეფასების მატრიცის შესახებ გადაწყვეტილების მიმღები პირი 3–ის მიხედვით), weights.txt (ინფორმაცია წონების ვექტორზე), FuzzyTravelTimes.txt (ინფორმაცია ფაზი მოგზაურობის დროების მატრიცის შესახებ).

TOPSISAggregations.py პასუხისმგებელია ფაზი TOPSIS აგრეგირების მთლიანი ბიზნეს–პროცესის იმპლემენტაციაზე. გამოთვლების შედეგების შენახვა ხდება OutputFiles სახელწოდების მქონე საქაღალდეში pareto_solutions.txt (აგრეგირების შედეგად მიღებული პარეტო ამონახსნები) ტექსტური ფაილის სახით.

main.py წარმოადგენს მთავარ პროგრამას, შესაბამისად, ასრულებს III თავში განხილული პრაქტიკული ამოცანის ალგორითმის რეალიზაციას სხვადასხვა ფუნქციების ორგანიზებულად მიმართვის გზით.

main.py ფაილში წარმოდგენილი პროგრამული კოდი

```
import CollectInitialDatas as c
import TOPSISAggregations as agg

def main(quantity_of_candidate_sites=5,quantity_of_attributes=5,
            quantity_of_experts=3,quantity_of_alternatives=6):
    try:
        #ბიჯი 1: განთავსების განმსაზღვრელი ატრიბუტების შერჩევა.
        n=quantity_of_attributes
        s=sorted(c.Get_set_of_attributes(n))
        print(f"{'Set of attributes:':30s}{s}")

        #ბიჯი 2: კანდიდატი მომსახურების ცენტრების განთავსების ადგილის შერჩევა.
        m=quantity_of_candidate_sites
        cs=sorted(c.Get_set_of_candidate_sites(m))
        print(f"{'Set of candidate sites:':30s}{cs}")

        '''ბიჯი 3:ატრიბუტებთან მიმართებაში კანდიდატი
                მომსახურეობის ცენტრებისთვის რეიტინგების მინიჭება'''
        t=quantity_of_experts
        '''ექსპერტული ფაზი შეფასებების ფორმირება PFN-ებში
        თითოეული კანდიდატი წერტილისათვის
        თითოეულ ატრიბუტთან მიმართებაში'''
        #c.Get_appraisal_matrix_by_experts(t,m,n)

        '''ბიჯი 4: პითაგორული ფაზი გადაწყვეტილების მიღების მატრიცის გამოთვლა
          ატრიბუტებზე და კანდიდატ წერტილებზე.'''
        #ექპერტული შეფასებები
        expert_evaluations = dict.fromkeys([f'e{e+1}' for e in range(t)], None)
        for e in range(t):
            expert_evaluations[f'e{e+1}']=c.Import_appraisal_matrix(f'InputFiles\expert{e+1}.txt')
        print(f"{'Expert Evalutions:':30s}{expert_evaluations}")
        #ექსპერტების რეიტინგები
        expert_ratings=[round(1/3,3) for e in range(t)]
        print(f"{'Expert Ratings:':30s}{expert_ratings}")
        #პითაგორული ფაზი გადაწყვეტილების მიღების მატრიცის აგება
        A=agg.Build_pythagorean_fuzzy_decision_matrix_info(expert_evaluations, expert_ratings)
        print(f"{'Pythagorean Fuzzy Decision Matrix Info:':30s}{A}")

        #ბიჯი 5: პითაგორული ფაზი  PIS და NIS–ის იდენტიფიკაცია.
        ideal_solutions=agg.Build_pythagorean_fuzzy_PIS_and_NIS(A)
        print(f"{'Pythagorean Fuzzy PIS and NIS:':30s}{ideal_solutions}")

        '''ბიჯი 6. ალტერნატიული კანდიდატი წერტილების განთავსებების შეფასებებსა და
          პითაგორული ფაზი PIS-ისა და NIS-ს შორის მანძილების გამოთვლა.'''
        #ატრიბუტებზე წონითი ვექტორის ფორმირება
        #c.Get_weighted_vector_by_DMPs(n)
        w=c.Import_weighted_vector()
        print(f"{'Weights of attributes':30s}{w}\n")
```

```
        #მანძილების გამოთვლა
        distances=agg.Build_distances(A,w, ideal_solutions)
        print(f"{'Distances:':30s}{distances}\n")

        '''ბიჯი 7. TOPSIS აგრეგირებების, როგორც მომსახურეობის წერტილის
        შერჩევის ინდექსის გამოთვლა ყველა ალტერნატივისთვის'''
        RC=agg.Build_relative_closeness(distances)
        print(f"{'Relaitive Closeness:':30s}{[f'RC(cs{n+1})={rc:.3f}' for n,rc in enumerate(RC)]}\n")

        #ბიჯი 8. ფაზი მოგზაურობის დროების ფორმირება
        k=quantity_of_alternatives
        #c.Get_fuzzy_travel_times_matrix(m, k)
        ttm=c.Import_fuzzy_travel_times_matrix(k)
        print(f"{'Fuzzy Travel Times:':30s}{ttm}\n")

        ttm_boolean=agg.Build_fuzzy_travel_boolean_matrix(ttm,5)
        print(f"{'Fuzzy Travel in Boolean:':30s}{ttm_boolean}\n")

        #კანდიდატი წერტილების ქვესიმრავლეების აგება
        sub_cs=agg.Build_subset_of_candidate_sites(ttm_boolean)
        print(f"{'Subset of candidate sites:':30s}{sub_cs}\n")

        #პარეტო ამონახსნების აგება
        ps=agg.Build_pareto_solutions(sub_cs,RC)
        print(f"{'Pareto Solutions:':30s}{ps}\n")

        #პარეტო ამონახსნების ექსპორტი შედეგების ფაილში
        agg.Export_pareto_solutions(ps)

    except Exception as e:
        print(e.args[0])

if __name__ == '__main__':
    main()
```

CollectInitialDatas.py ფაილში წარმოდგენილი პროგრამული კოდი

```
def Get_set_of_attributes(quantity_of_attributes):
    return {f's{s+1}' for s in range(quantity_of_attributes)}

def Get_set_of_candidate_sites(quantity_of_candidate_sites):
    return {f'cs{cs+1}' for cs in range(quantity_of_candidate_sites)}

def Get_fuzzy_travel_times_matrix(quantity_fire_stations, quantity_of_objects):
    f_out=open('InputFiles\FuzzyTravelTimes.txt','w',encoding='utf-8')
    for cs in range(quantity_fire_stations):
        for a in range(quantity_of_objects):
            t=eval(input(f'enter FTN for cs{cs+1} on a{a+1}:'))
            f_out.write(f'({t[0]:2d},{t[1]:2d},{t[2]:2d})')
        f_out.write('\n')
    f_out.close()
```

```
def Import_fuzzy_travel_times_matrix(quantity_of_objects):
    ttm={}
    f_in=open('InputFiles\FuzzyTravelTimes.txt',"r",encoding="utf-8")
    for index,row in enumerate(f_in.readlines()):
        ttm[f'cs{index+1}']=[eval(row[10*s:10*(s+1)]) for s in range(quantity_of_objects)]
    f_in.close()
    return ttm

def Get_weighted_vector_by_DMPs(quantity_of_attributes):
    f_out=open(f'InputFiles\weights.txt','w',encoding='utf-8')
    for d in range(quantity_of_attributes):
        weight=input(f'please enter weight on d{d+1}: ')
        f_out.write(f'{weight} ')
    f_out.close()

def Import_weighted_vector():
    f_in=open("InputFiles\weights.txt","r", encoding="utf-8")
    weights=[float(w) for w in f_in.read().strip(" ").split(" ") if w!='\n']
    f_in.close()
    return weights

def Get_appraisal_matrix_by_experts(quantity_of_experts, quantity_of_cantidate_sites,
quantity_of_attributes):
    for e in range(quantity_of_experts):
        print(f'Please enter evaluations in term of tuple of real numbers for expert {e+1}')
        f_out=open(f'InputFiles\expert{e+1}.txt','w',encoding='utf-8')
        for cs in range(quantity_of_cantidate_sites):
            for s in range(quantity_of_attributes):
                tuple=eval(input(f'cs{cs+1} on s{s+1}: '))
                f_out.write(f'{tuple} ')
            f_out.write('\n')
        f_out.close()

def Import_appraisal_matrix(filename):
    evalutions={}
    f_in=open(filename,"r",encoding="utf-8")
    for index,row in enumerate(f_in.readlines()):
        evalutions[f'cs{index+1}']=[eval(column.strip("\n")) for column in row.split(" ")]
    f_in.close()
    return evalutions
```

TOPSISAggregations.py *ფაილში წარმოდგენილი პროგრამული კოდი*

```
import functools

def Build_pythagorean_fuzzy_decision_matrix_info(expert_evaluations,expert_ratings):
    A={}
    for cs in range(len(expert_evaluations['e1'])):
        A[f'cs{cs+1}']=[]
        for s in range(len(expert_evaluations['e1']['cs1'])):
            product=lambda x,p:((1-(1-(x[0]**2))**p)**0.5, x[1]**p)
            total=lambda x,y:(((x[0]**2)+(y[0]**2)-(x[0]**2)*(y[0]**2))**0.5, x[1]*y[1])
            pfn=functools.reduce(total,[product(expert_evaluations[f'e{e+1}'][f'cs{cs+1}'][s],
                                    expert_ratings[e]/sum(expert_ratings))
                                for e in range(len(expert_evaluations))])
            A[f'cs{cs+1}'].append(eval(f'({round(pfn[0],2)},{round(pfn[1],2)})'))
    return A

def Build_pythagorean_fuzzy_PIS_and_NIS(decision_matrix_info):
    A=decision_matrix_info
    ideal_sulutions={'PIS':[], 'NIS':[]}
    for s in range(len(A["cs1"])):
        ls = [A[f'cs{cs+1}'][s] for cs in range(len(A))]
        ideal_sulutions['PIS'].append(functools.reduce(lambda x,y:(max(x[0],y[0]), min(x[1], y[1])), ls))
        ideal_sulutions['NIS'].append(functools.reduce(lambda x,y:(min(x[0],y[0]), max(x[1], y[1])), ls))
    return ideal_sulutions

def Build_distances(decision_matrix_info,weighted_vector,ideal_sulutions):
    A=decision_matrix_info
    w=weighted_vector
    ids=ideal_sulutions
    distances={'cs+':[],'cs-':[]}
    for cs in range(len(A)):
        distance=lambda x,y:(abs(x[0]**2-y[0]**2)+abs(x[1]**2-y[1]**2))*0.5
        distances['cs+'].append(round(sum([w[s]*distance(A[f'cs{cs+1}'][s],ids['PIS'][s]) for s in
range(len(w))]),2))
        distances['cs-'].append(round(sum([w[s]*distance(A[f'cs{cs+1}'][s],ids['NIS'][s]) for s in
range(len(w))]),2))
    return distances

def Build_relative_closeness(distances):
    return [distances['cs-'][cs]/(distances['cs+'][cs]+distances['cs-'][cs]) for cs in
range(len(distances['cs+']))]

def Build_fuzzy_travel_boolean_matrix(fuzzy_travel_times,T):
    ftt=fuzzy_travel_times
    for cs in range(len(ftt)):
        for a in range(len(ftt[f'cs{cs+1}'])):
            ftn=ftt[f'cs{cs+1}'][a]
            if (ftn[1]+(ftn[2]-2*ftn[1]+ftn[0])/4)<=T:
                ftt[f'cs{cs+1}'][a]=1
            else:
                ftt[f'cs{cs+1}'][a]=0
    return ftt
```

```
def Build_subset_of_candidate_sites(fuzzy_travel_boolean_matrix):
   ftt=fuzzy_travel_boolean_matrix
   N=[set() for a in range(len(ftt['cs1']))]
   for cs in range(len(ftt)):
      [N[index].add(cs) for index,a in enumerate(ftt[f'cs{cs+1}']) if a==1]
   return N

def Build_pareto_solutions(candidate_sites,relative_closeness):
   N=set(map(frozenset, candidate_sites))
   rc=relative_closeness
   pareto_solutions= {}
   for fs in N:
      f1=len(fs)
      key="{"
      f2=0.0
      for cs in fs:
         f2+=rc[cs]
         key+=f'cs{cs+1},'
      key=key.rstrip(",")
      key+="}"
      pareto_solutions[key]={'f1':f1,'f2':round(f2,3)}
   return pareto_solutions

def Get_report(pareto_solutions):
   min_f1 = min([value['f1'] for value in pareto_solutions.values()])
   filter = {k:v for k,v in pareto_solutions.items() if v['f1'] ==min_f1}
   max_f2 = max([value['f2'] for value in filter.values()])
   pr = {k:v for k,v in filter.items() if v['f2']==max_f2}
   return pr

def Export_pareto_solutions(pareto_solutions):
   sub=open("OutputFiles\pareto_solutions.txt","w", encoding="utf-8")
   for key, value in pareto_solutions.items():
      sub.write(f"{key},f1={value['f1']},f2={value['f2']}\n")
   sub.close()
```

დასკვნა

დისერტაციის I თავი ეხება მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების მოდელების მიმოხილვას და საჭირო განსაზღვრებებისა და ტერმინების განხილვას, რომლებიც აუცილებელია შემდეგი თავების მასალის სრულფასოვანი წარმოდგენისთვის.

დისერტაციის II თავში *აგებული* იქნა ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი წონითი გასაშუალოების (P-IFWA) და ალბათური ინტუიციონისტური ფაზი წონითი გეომეტრიული (P-IFWG) ოპერატორების ახალი განზოგადოებები $-As-F_M$, $F \in \{P-IFWA, P-IFWG\}$, $M \in \{\vee, \wedge\}$, სადაც განუზღვრელობა წარმოდგენილია ფაზი ზომის სახით. განისაზღვრა ახალი ოპერატორები ფაზი ზომის ასოცირებული ალბათობების კლასთან (APC) მიმართებაში. არსებობს $As-F_M$ ოპერატორთა გამოსახულების ოთხი ვარიანტი კონკრეტული ინტუიციონისტური მოქმედებებისათვის - ინტუიციონისტური მინიმუმი და მაქსიმუმი კონკრეტული ფაზი ზომის მიმართ.

მტკიცებულებები განზოგადოებების კორექტულობის შესახებ დამტკიცებულია. 1. $As-F_M$ ოპერატორები ფაზი ზომისთვის - მეორე რიგის ტევადობა, ემთხვევა ინტუიციონისტური ფაზი შოკების გასაშუალოების (IFCA) ან ინტუიციონისტური ფაზი შოკეს გეომეტრიულ (IFCG) ოპერატორებს; 2. $As-F_M$ ოპერატორები ემთხვევა ინტუიციონისტური ფაზი ალბათური გასაშუალოების (IFPA) ან ინტუიციონისტური ფაზი ალბათური გეომეტრიულ (IFPG) ოპერატორებს, როდესაც ალბათური ზომა გამოიყენება ფაზი ზომის როლში.

შოკეს ინტეგრალური აგრეგაციისგან განსხვავებით, აგებული ოპერატორები და მათი შეუღლებული ოპერატორები საშუალებას გვაძლევს გავუმკლავდეთ ყველა ატრიბუტებს შორის ძლიერ *ურთიერთქმედებებს* (კრიტერიუმებს შორის) ინტუიციონისტურ ფაზი MCDM/MADM –ის ამოცანებში.

განხილულია საილუსტრაციო მაგალითი ახალი $As-F_M$ ოპერატორების ფაზი ჯგუფური გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებში გამოყენების მიზნით. რისკები, მაშასადამე უზუსტობისა და განუზღვრელობის მენეჯმენტი, მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ბიზნეს–წამოწყების საქმეში. რისკის შეფასებები ჩვეულებრივ გამოიყენება

ბიზნეს–წამოწყების პრობლემური საკითხების იდენთიფიცირების პროცესში. განხორციელდა IFWA, IFWG, IFCA და IFCG ოპერატორების მნიშვნელობების შედარება $As - F_M$ ოპერატორების მნიშვნელობებთან. შედეგები მიუთითებს $As - F_M$ ოპერატორების შესაძლებლობაზე გაითვალისწინონ კონკრეტულ ამოცანაში გადაწყვეტილების რისკების შესახებ DMP–ების განსაკუთრებული ინტერესები, მომხმარებლის განწყობაზე პესიმიზმიდან დაწყებული ოპტიმიზმით დამთავრებული.

შემუშავებულია II თავში აგებულ აგრეგირების ოპერატორებზე დაფუძნებული გადაწყვეტილების მიღების მხარდამჭერი პროგრამული კოდები Python დაპროგრამების ენაზე.

პერსპექტიული კვლევების მიმართულებით გაგრძელდება მუშაობა ახალი აგრეგირების ოპერტორების აგების მიზნით თანამედროვე ფაზი გარემოებების გათვალისწინებით.

სადისერტაციო ნაშრომის III თავში წარმოდგენილია სერვის ცენტრების განთავსება/შერჩევის პრობლემის ახალი მიდგომა ექსტრემალური და განუზღვრელი გარემოსთვის. მიდგომა იყენებს პითაგორულ ფაზი რიცხვებში წარმოდგენილ ექსპერტულ ცოდნას და ითვალისწინებს განთავსების შერჩევის ხარისხის შეფასებას (ხელმისაწვდომობა, უსაფრთხოება და ა.შ.) აგებული ახალი ფაზი TOPSIS მიდგომის გამოყენებით. მეორეს მხრივ, მოდელი ასევე განიხილავს ყველა მნიშვნელოვან ინფრასტრუქტურულ პუნქტამდე დროულად მისასვლის შესაძლებლობებს, რომელიც წარმოდგენილია სამკუთხა ფაზი რიცხვებით. შედეგად მიღებულია ბი-კრიტერიუმიანი სიმრავლის დაფარვის ამოცანა. აგებული მიდგომა ილუსტრირებულია რიცხვითი მაგალითით და განსაზღვრავს თუ რომელი სახანძრო სადგურების შერჩევა მოხდება მომსახურეობის განთავსებისთვის ყველა შესაძლო სადგურებიდან პირობითად ჰიპოთეტური ქალაქის მაგალითზე. საოპტიმიზაციო ამოცანის გადაწყვეტიდან გამომდინარე სისტემის დისპეჩერების მიერ უპირატესი პარეტო ამონახსენის მიხედვით შერჩეული სადგურებიდან მოხდება კრიტიკული ინფრასტრუქტურის პუნქტების მომსახურეობა კატასტროფის შემთხვევაში.

შემუშავებულია III თავში წარმოდგენილი სიმულაციური მაგალითის მხარდამჭერი პროგრამული კოდები Python დაპროგრამების ენაზე.

პერსპექტიული კვლევების მიმართულებით გაგრძელდება მუშაობა TOPSIS ახალი მიახლოებების აგების მიზნით თანამედრივე ფაზი გარემოებების გათვალისწინებით.

ბიბლიოგრაფია

Aczel J. (1948). On Mean Values. *Bulletin of the American Mathematical Society 54*, pp. 392-400.

Aczel J. (1966). Lectures on Functional Equations and Applications. *Academic Press: New York*.

Atanassov K. (1986). Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems , Vol. 20*, pp. 87–96.

Atanassov K. (1999). Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications. *Physica-Verlag, Heidelberg*.

Beliakov G., Pradera A., Calvo T. (2007). Aggregation functions: A Guide for Practitioners. *Springer-Verlag, Berlin*, 360.

Bellman R., Zadeh L. (1970). Decision making in a fuzzy environment. *Management Science, Vol.17B, No.4*, pp. 141-164.

Blin J. (1977). Fuzzy sets in multiple criteria decision making. *TIMS/studies in the Management Sciences*, pp. 129-146.

Buckley J. (1985). Fuzzy decision-making with data: Applicattions to statistics. *Fuzzy Sets and Systems*, pp. 139-147.

Buckley J. (1985). Ranking alternatives using fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, pp. 21-31.

Buckley J. (1987). Fuzzy programming and the multicriteria decision problem. *optimization Models using Fuzzy, J. Kacprzyk(ed.)*, pp. 226-244.

Calvo T., Mesiar R. (1999). Generalized medians. *Proceedings of aggregation'99*, pp. 159-165.

Campos L., Bolanos M. (1989). Representation of fuzzy measures through probabilities. *Fuzzy sets and systems 31*, pp. 23–36.

Choquet G. (1954). Theory of capacities. *Annals d'Institute Fourier 5* , pp. 131–295.

Chu T. (2002). Facility location selection using fuzzy TOPSIS under group decisions. *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems , Vol.10* (No.6), pp. 687–701.

Daskin M. (2013). Network and Discrete Location Models. *Algorithms and Applications, John Wiley & Sons* .

De S., Biswas R, Roy A. (2000). Some operations on intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems 114* , pp. 477–484.

DeLuca A., Termini S. (1972). Algebraic properties of fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pp. 373-386.

Dempster A. (1967). Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics 38* , pp. 325-339.

Denneberg D. (1994). Non-Additive Measure and Integral. *MA: Kluwer Academic, Norwell* .

Dijkman J., Haeringen H., DeLange S. (1983). Fuzzy Numbers. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pp. 302-341.

Dombi J. (1982). Basic concepts for the theory of evaluation: The aggregative operator. *European Journal of Operational Research 10.* , pp. 282-293.

Dubois D., Prade H. (1980). Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. *Academic Press, New York.*

Dubois D., Prade H. (1978). operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Science*, pp. 613-626.

Dubois D., Prade H. (1979). Decision-making under fuzziness. *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications* , pp.279-303.

Dubois D., Prade H. (1983). Ranking of fuzzy numbers in the setting of possibility theory. *Information Sciences*, pp. 183-224.

Dubois D., Prade H. (1986). Weighted minimum and maximum operations in fuzzy set theory. *The Reliability of Expert Systems* , pp. 64-118.

Dubois D., Prade H. (1988). Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty. *Plenum Press* .

Dujmovic J. (1976). Evaluation Comparison and Optimization of hybrid computers using the theory of complex criteria,. *Simulation of Systems*, pp. 553-566.

Dyckhoff H., Pedrycz W. (1984). Generalized means as model of compensative connectivities. *Fuzzy Sets and Systems 14* , pp. 143-154.

Ehrgott M. (2005). Multicriteria optimization. *Springer* .

Engemann K., Filev D., Yager R. (1996). Modelling decision making using immediate probabilities. *International Journal of General Systems 24* , pp. 281-294.

Fagin R., Wimmers E. (2000). A formula for incorporating weights into scoring rules. *Theoretical Computer 239* , pp. 309-338.

Fodor J., Roubens M. (1994). Fuzzy Preference Modeling and Multicriteria Decision Support. *Kluwer Academic Publisher : Dordrecht.*

Grabisch M. (1995). A new algorithm for identifying fuzzy measures and its application to pattern recognition. *In International Joint Conference of 4th IEEE international conference on fuzzy systems and the 2nd international on fuzzy engineering symposium, Yokohama, Japan*, pp. 145–150.

Grabisch M. (1995). Fuzzy integral in multicriteria decision making. *Fuzzy Sets and Systems 69*, pp. 279–298.

Grabisch M. (1996). The representation of importance and interaction of features by fuzzy measures. *Pattern Recognition Letters 17* , pp. 567–575.

Grabisch M. (1997). Alternative representations of discrete fuzzy measures for decision making. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness, and Knowledge Based Systems 5* , pp. 587–607.

Grabisch M. (1997). K-order additive discrete fuzzy measures and their representations. *Fuzzy Sets and Systems 92(2)* , pp. 167-189.

Grabisch M., Kojadinovic I., Meyer P. (2008). A review of methods for capacity identification in Choquet integral based multi-attribute utility theory. *European Journal of Operational Research 186*, pp. 766–785.

Grabisch M., Murofushi T., Sugeno M. (2000). Fuzzy measures and integrals: Theory and applications. *Studies in Fuzziness and Soft Computing 40* .

Hwang C., Yoon K. (1981). Multiple attribute decision making: methods and applications.

Jahanshahloo G., Hosseinzadeh L., Izadikhah M. (2006). Extension of the TOPSIS method for decision-making problems with fuzzy data. *Applied Mathematics and Computation , Vol.181*, pp. 1544–1551.

Kaufmann A. (1975). Theory of Fuzzy Subsets. *Academic Press, New York* .

Kaufmann A. (1988). Theory of expertons and fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems 28 (3)*, pp. 295-304.

Kaufmann A., Gupta M. (1985). Introduction to Fuzzy Arithmetic. *Van Nostrand, New York*.

Khutsishvili I., Sirbiladze G., Tsulaia G. (2015). Hesitant Fuzzy MADM Approach in Optimal Selection of Investment Projects, *EasyChair Proceedings in Computing, EPiC Series in Computer Science*, Volume 36, pp. 151-162.

Klir G., Folger T. (1988). Fuzzy Sets. *Uncertainty and Information*, pp. 27-32.

Klir G., Wierman M. (1998). Uncertainty-Based Information. Element Of Generalized Information Theory. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, pp. 22-30.

Kojadinovic I. (2002). Modeling interaction phenomena using fuzzy measures: On the notions of interaction and independence. *Fuzzy Sets and Systems 135*, pp. 317–340.

Kolmogorov A. (1930). Sur la notion de moyenne, Atti delle Reale Accademia Nazionale dei Lincei Mem. Cl. Sci. Mat. Natur. Sez. 12. pp. 323-343.

Krishnan A., Kasim M., Bakar E. (2015). A short survey on the usage of Choquet integral and its associated fuzzy measure in multiple attribute analysis. *Procedia Computer Science 59*, pp. 427 – 434.

Liginlal D., Ow T. (2006). Modeling attitude to risk in human decision processes: An application of fuzzy measures. *Fuzzy Sets and Systems 157* , pp. 3040–3054.

Luce R., Krantz D., Suppes P., Tversky A. (1990). Foundations on measurements. *Academic Press, New York* .

Marichal J., Roubens M. (1998). Dependence between criteria and multiple criteria decision aid. *In 2nd international Workshop on preferences and decisions, Trento, Italy*, pp. 69–75.

Mayor G., Trillas E. (1986). On the representation of some Aggregation functions. *Proceeding of ISMVL* , pp. 111-114.

Merigo J. (2008). New extensions to the OWA operators and its application in decision making (In Spanish). *PhD Thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona.*

Merigo J. (2008). Using immediate probabilities in fuzzy decision making. *Proceedings of the 22nd ASEPELT Conference, Barcelona* , pp. 1650-1664.

Merigó J. (2009). The probabilistic weighted average operator and its application in decision making. *Operations Systems Research & Security of Information*, pp. 55–58.

Merigó J. (2011). Fuzzy multi-person decision making with fuzzy probabilistic aggregations operators. *International Journal of Fuzzy Systems 13(3)* , pp. 163-174.

Merigó J. (2012). Probabilities in the OWA operator. *Expert Systems with Applications 39* , pp. 11456–11467.

Merigó J., Casanovas M. and Xu Y. (2014). Fuzzy group decision-making with generalized probabilistic OWA operators. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 27(2)* , pp. 783-792.

Merigó J., Casanovas M., Yang J. (2014). Group decision making with expertons and uncertain generalized probabilistic weighted aggregation operators. *European Journal of Operational Research 235*, pp. 215–224.

Merigó J., Montserrat L., Ramón C. (n.d.). Induced aggregation operators in decision making with the Dempster-Shafer belief structure.

Mesiar R., Komorníková M. (1997). Aggregation Operators. *Proceeding of the XI Conference on applied Mathematics PRIM' 96, Herceg D., Surla K. (eds.), Institute of Mathematics* , pp. 193-211.

O'Hagan M. (1988). Aggregating template or rule antecedents in real-time expert systems with fuzzy set logic. *Proceedings of the 22nd Annual IEEE Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, Ca.* , pp. 681-689.

Ovchinnikov S. (1998). On Robust Aggregation Procedures. *Aggregation Operators for Fusion under Fuzziness*, pp. 3-10.

Pap E. (1995). Null-additive set functions. *Boston: Kluwer Acad. Publ.*

Roubens M. (1996). Interaction between criteria and definition of weights in MCDA problems. *In Proceedings of the 44th meeting of the European working group multicriteria aid for decisions*.

Silvert W. (1979). Symmetric summation: a class of operations on fuzzy sets. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 9.*, pp. 659-667.

Sirbiladze G. (2004). About a Universal Representation-Interpretator of a Fuzzy Measure. *Bulletin of the Georgian Academy of Sciences , N3*, pp. 454-457.

Sirbiladze G. (2012). Extremal Fuzzy Dynamic Systems: Theory and Applications. *IFSR International Series on Systems Science and Engineering, 28, 1st Edtition, Springer.*

Sirbiladze G. (2013). *Extremal Fuzzy Dynamic Systems* (Theory and Applications. IFSR International Series on Systems Science and Engineering ed.). New York-Heidelberg-Dordrecht-London: Springer.

Sirbiladze G., Badagadze O., Sirbiladze K., Tsulaia G. (2012). OWA – Type Possibilistic Aggregations in the Problem of the Country Political Management. *Transactions of the International Scientific Conference Dedicated to the 90-th Anniversary of the International Scientific Conference Dedicated to the 90-th Anniversary of Georgian Technical University, Tbilisi, Georgia.*, pp. 316-321.

Sirbiladze G., Badagadze O., Tsulaia G. (2016). New Fuzzy Aggregations. Part I: General Decision Making System and its Information Structure, *International Journal of Control Systems and Robotics*, Volume 1, pp. 63 – 72.

Sirbiladze G., Badagadze O., Tsulaia G. (2016). New Fuzzy Aggregations. Part II: Associated Probabilities in the Aggregations of the POWA operator, *International Journal of Control Systems and Robotics*, Volume 1, pp. 73 – 85.

Sirbiladze G., Badagadze O., Tsulaia G. (2016). New Fuzzy Aggregations. Part III: Application of New FPOWA Operators in the Problem of Political Management, *International Journal of Control Systems and Robotics*, Volume 1, pp. 86 – 95.

Sirbiladze G., Badagadze O., Tsulaia G., Varshanidze A. (2015). Associated Probabilities of a Fuzzy Measure in the Aggregations of Fuzzy Probabilistic Mean Operators, *GESJ:Computer Sciences and Telecommunications,* No.1(45), pp. 93-123.

Sirbiladze G., Gachechiladze T. (2005). Restored fuzzy measures in expert decision making,. *Information Sciences 169(1/2),* pp. 71-95.

Sirbiladze G., Gelashvili K., Khutsishvili I., Sikharulidze A. (2015). Temporalized structure of bodies of evidence in the multi-criteria decision-making model, . *International Journal of Information Technology & Decision Making 14(3)* , pp. 565-596.

Sirbiladze G., Ghvaberidze B., Matsaberidze B. (2014). Bicriteria Fuzzy Vehicle Routing Problem for Extreme Environment. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences , Vol. 8* (No. 2), pp. 41-48.

Sirbiladze G., Ghvaberidze B., Matsaberidze B., Sikharulidze A. (2017). Multi-Objective Emergency Service Facility Location Problem Based on Fuzzy TOPSIS. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences , Vol.11* (No.1), pp. 23-30.

Sirbiladze G., Khachidze G. (2003). Decision-Making Aiding Fuzzy Information Analysis in Investments. Part II: Dempster-Shafer's Expected Utility in Investments. *Proc. of JavakhishviliTbilisiStateUniversity, Applied Mathematics, Computer Sciences, Vol.353(22-23)* , pp. 95-108.

Sirbiladze G., Khutsishvili I., Badagadze O., Tsulaia G. (2018). Associated Probability Intuitionistic Fuzzy Weighted Operators in Business Start-up Decision Making, *Iranian Journal of Fuzzy Systems,* Volume 15, Issue 5, pp. 1-25;

Sirbiladze G., Khutsishvili I., Ghvaberidze B. (2014). Multistage decision-making fuzzy methodology for optimal investments based on experts' evaluations. *European Journal of Operational Research 232(1)*, pp.169-177.

Sirbiladze G., Sikharulidze A. (2003). Weighted fuzzy averages in fuzzy environment. *Parts I,II, International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems 11(2).*, pp. 139-172.

Sirbiladze G., Sikharulidze A. (2010). Dempster-Shafer Temporalized Belief Structure on Expert knowledge Streams, Part I. Theoretical Foundations. *Proccedings of 10th International conference on Intelligent Systems Design and Applications (ISDA'10) held in Cairo, Egypt*, p.68.

Sirbiladze G., Sikharulidze A., Ghvaberidze B., Matsaberidze B. (2011). Fuzzy-probabilistic Aggregations in the Discrete Covering Problem. *International Journal of General Systems, Vol.40* (No.2), pp. 169 -196.

Sirbiladze G., Tsulaia G. (2014). OWA-Type Possibilistic Aggregations in a Decision Making Regarding Selection of Investments, Proceedings of the 2014 International Conference on Systems, Control, Signal Processing and Informatics II (SCSI'14), Recent Advances in Electrical Engineering Series - 33, pp. 79-81.

Sirbiladze G., Tsulaia G., Badagadze O. (2014). OWA–type Fuzzy Aggregations in a Decision Making Regarding the Selection of Investments, International Journal of fuzzy systems and advanced applications, Volume 1, pp. 83 - 87.

Sugeno M. (1974). Theory of Fuzzy Integral and its applications. *Thesis (PhD) (Tokuo Institute of Technology, Tokyo).*

Tan C. (2011). A multi-criteria interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making with Choquet integral-based TOPSIS. *Expert Systems with Applications 38* , 3023–3033.

Tan C., Chen X. (2010). Intuitionistic fuzzy Choquet integral operator for multi-criteria decision making. *Expert Systems with Applications 37*, pp. 149–157.

Torra V. (1997). The weighted OWA operator. *International Journal of Intelligent Systems, 12.,* pp. 153-166.

Torra V., Narukawa Y. (2007). Modeling Decisions: Information Fusion and Aggregation Operators. *Berlin: Springer-Verlag.*

Tsulaia G. (2020). TOPSIS Approach to Facility Location Selection Problem for Pythagorean Fuzzy Environment. *GESJ: Computer Sciences and Telecommunications,* No.1(48), pp. 46-54.

Wakker P. (1999). Additive representations of preferences. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht* .

Wang W., Wang Z., Klir G. (1998). Genetic algorithms for determining fuzzy measures from data. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 6* , pp. 171–183.

Wang Y., Lee H. (2007). Generalizing TOPSIS for fuzzy multi-criteria group decision making. *Computers and Mathematics with Applications, Vol. 53,* pp. 1762–1772.

Wei G., Merigó J. (2012). Methods for strategic decision making problems with immediate probabilities in intuitionistic fuzzy setting. *Scientia Iranica E 19 (6)* , pp. 1936-1946.

Wu J., Chen F., Nie C., Zhang Q. (2013). Intuitionistic fuzzy-valued Choquet integral and its application in multicriteria decision making. *Information Sciences 222* , pp. 509–527.

Wu J., Zhang Q. (2010). 2-order additive fuzzy measure identification method based on diamond pairwise comparison and maximum entropy principle. *Fuzzy Optimization and Decision Making 9*, pp. 435–453.

Xia M., Xu Z. (2013). Group decision making based on intuitionistic multiplicative aggregation operators. *Applied Mathematical Modelling 37* , pp. 5120–5133.

Xu Z. (2007). Intuitionistic fuzzy aggregation operators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 15,* pp. 1179–1187.

Xu Z. (2008). Intuitionistic Fuzzy Information: Aggregation Theory and Applications. *Science Press, Beijing* .

Xu Z. (2010). Choquet integrals of weighted intuitionistic fuzzy information. *Information Sciences 180*, pp. 726–736.

Xu Z., Da Q. (2003). An overview of operators for aggregating information. *International Journal of Intelligent Systems, 18.* , pp. 953-968.

Xu Z., Yager R. (2006). Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets. *International Journal of General Systems 35* , pp. 417–433.

Yager R. (1981). A new methodology for ordinal multiple aspect decisions based on fuzzy sets. *Decision Sciences 12*, pp. 589-600.

Yager R. (1988). On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making. *IEEE Transactions on Systems, Man anf Cybernetics, Vol. 18* , pp. 183-190.

Yager R. (1992). Decision making under Dempster-Shafer uncertainties. *International Journal of General Systems, 20.* , pp. 233-245.

Yager R. (1993). Families of OWA operators. *Fuzzy Sets an Systems, Vol. 59.* , pp. 125-148.

Yager R. (1996). Quantifier Guided Aggregation Using OWA Operators. *International Journal of Intelligent Systems, Vol. 11.* , pp. 49-73.

Yager R. (1999). Including decision attitude in probabilistic decision making. *International Journal of Approximate Reasoning, 21* , pp. 1-21.

Yager R. (2004). Generalized OWA aggregation operators. *Journal of Fuzzy Optimization and Decision Making 3 (1)* . , pp. 93–107.

Yager R. (2013). Pythagorean Fuzzy Subsets. *Proceedings of the Joint IFSA Congress and NAFIPS Meeting*, (pp. pp. 357–61).

Yager R. (2014). Pythagorean Membership Grades in Multicriteria Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 22*, pp. 958 – 965.

Yager R. (2017). Generalized Orthopair Fuzzy Sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems , Vol. 25* (No. 5), pp. 1222– 1230.

Yager R., Alajlan N., Bazi Y. (2018). Aspects of Generalized Orthopair Fuzzy Sets. *International Journal of Intelligent Systems , Vol. 33* (No. 11), pp. 2154-2174.

Yager R., Filev D. (1999). Induced ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B, 29.* , pp. 141-150.

Yager R., Kacprzyk J. (1997). The Ordered Weighted Averaging Operators. *Theory and Applications, Kluwer Academic Publisher: Boston, Dordrecht, London.*

Yager R., Rybalov A. (1998). Full reinforcement operators in aggregation techniques. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 28.* , pp. 757-769.

Yong D. (2006). Plant location selection based on fuzzy TOPSIS. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology , Vol.28*, pp. 839–844.

Zadeh L. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control , vol. 8*, pp. 338-353.

Zadeh L. (1968). Probability measure of fuzzy events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications , Vol. 23*, pp. 421-427.

Zadeh L. (1979). Fuzzy logic and its applications to decision and control analysis. *Proceedings 1978 IEEE Conference on Decision and Control* .

Zadeh L. (1993). Fuzzy Logic = Computing with Words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 59* , pp. 125-148.

Zhang Q., Ma J., Fan Z., Wu J., Sun Q., Meng J. (2001). Uniformity on the Preference Information on Alternatives in Multiple Attibute Decision Making. *IEEE* , pp. 697-702.

Zhang X., Xu Z. (2014). Extension of TOPSIS to Multiple Criteria Decision Making with Pythagorean Fuzzy Sets. *International Journal of Intelligent Systems , Vol. 29*, pp. 1061–1078.

Zimmermann H. (1985). Fuzzy Set Theory and Its Applications. *Kluwer, Nijhoff Publishing, Boston* .

Zimmermann H. (1987). Fuzzy Set, Decision Making, and Expert System. *Kluwer, Boston* .

Zimmermann H., Zadeh L., Gaines B. (eds.) (1984). Fuzzy Sets and Decision Analysis. *TIMS/studies in the Management Sciences, Vol. 20*.

სადისერტაციო ნაშრომის ფარგლებში გამოქვეყნებული ნაშრომების სია

1. **Gvantsa Tsulaia,** TOPSIS Approach to Facility Location Selection Problem for Pythagorean Fuzzy Environment, GESJ: *Computer Sciences and Telecommunications*, 2020, No.1(48), pp. 46-54.
   http://gesj.internet-academy.org.ge/download.php?id=3334.pdf
2. **Gia Sirbiladze, Irina Khutsishvili, Otar Badagadze, Gvantsa Tsulaia,** Associated Probability Intuitionistic Fuzzy Weighted Operators in Business Start-up Decision Making, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, Volume 15, Issue 5, September and October 2018, pp. 1-25;
   http://ijfs.usb.ac.ir/article_4156.html
3. **Gia Sirbiladze, Otar Batagadze, Gvantsa Tsulaia**, New Fuzzy Aggregations. Part I: General Decision Making System and its Information Structure, *International Journal of Control Systems and Robotics*, 2016, Volume 1, pp. 63 – 72.
   https://www.iaras.org/iaras/caijcsr/new-fuzzy-aggregations-part-i-general-decision-making-system-and-its-information-structure
4. **Gia Sirbiladze, Otar Batagadze, Gvantsa Tsulaia**, New Fuzzy Aggregations. Part II: Associated Probabilities in the Aggregations of the POWA operator, *International Journal of Control Systems and Robotics*, 2016, Volume 1, pp. 73 – 85.
   https://www.iaras.org/iaras/caijcsr/new-fuzzy-aggregations-part-ii-associated-probabilities-in-the-aggregations-of-the-powa
5. **Gia Sirbiladze, Otar Batagadze, Gvantsa Tsulaia,** New Fuzzy Aggregations. Part III: Application of New FPOWA Operators in the Problem of Political Management, *International Journal of Control Systems and Robotics*, 2016, Volume 1, pp. 86 – 95.
   https://www.iaras.org/iaras/caijcsr/new-fuzzy-aggregations-part-iii-application-of-new-fpowa-operators-in-the-problem-of-political-management

6. **Irina khutsishvili, Gia Sirbiladze, Gvantsa Tsulaia**, Hesitant Fuzzy MADM Approach in Optimal Selection of Investment Projects, *EasyChair Proceedings in Computing, EPiC Series in Computer Science*, 2015, Volume 36, pp. 151-162. https://easychair.org/publications/open/qwmZ
7. Gia Sirbiladze, Otar Badagadze, Gvantsa Tsulaia, Archil Varshanidze, Associated Probabilities of a Fuzzy Measure in the Aggregations of Fuzzy Probabilistic Mean Operators, GESJ:Computer Sciences and Telecommunications, 2015, No.1(45), pp. 93-123. http://gesj.internet-academy.org.ge/download.php?id=2566.pdf
8. Gia Sirbiladze, Gvantsa Tsulaia, Otar Badagadze, OWA–type Fuzzy Aggregations in a Decision Making Regarding the Selection of Investments, International Journal of fuzzy systems and advanced applications, 2014, Volume 1, pp. 83 - 87. http://naun.org/cms.action?id=7628
9. Gia Sirbiladze, Gvantsa Tsulaia, OWA-Type Possibilistic Aggregations in a Decision Making Regarding Selection of Investments, Proceedings of the 2014 International Conference on Systems, Control, Signal Processing and Informatics II (SCSI'14), Recent Advances in Electrical Engineering Series - 33, pp. 79-81. http://www.inase.org/library/2014/prague/SCSI.pdf
10. გია სირბილაძე, ოთარ ბადაგაძე, ხატია სირბილაძე, გვანცა წულაია, OWA-ს ტიპის შესაძლებლობითი აგრეგირებები ქვეყნის პოლიტიკური მენეჯმენტის პრობლემაში, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის დაარსებიდან 90 წლისთავისადმი მიძღვნილი საერთაშორისო სამეცნიერო შრომების კრებული, საქართველო, თბილისი, სექტემბერი, 2012, 316–321. http://gesj.internet-academy.org.ge/conf_gtu90/ge/program_ge.php